第３章５「確率変数の関数」「統計量と標本分布」 第３回

解答

1. (1) 2 , 3 , 4

k	2	3	4	計
$P(Y=k)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

(2) $\frac{8}{27}$

(3) $\frac{2}{9}$

(4) 独立ではない

2. (1) 4　　(2) 16　　(3) 25

3. 0.907

解説

1. (1) 復元抽出であるから，X_1 および X_2 はそれぞれ，1, 2 の値をとり得る．
よって $Y=X_1+X_2$ のとり得る値は，2 , 3 , 4 である．

$$P(Y=2)=P(X_1=1, X_2=1)$$
$$=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$
$$P(Y=3)=P(X_1=1, X_2=2)+P(X_1=2, X_2=1)$$
$$=\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times 2=\frac{4}{9}$$
$$P(Y=4)=P(X_1=2, X_2=2)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

以上より，**解答**の確率分布表を得る．

(2) $P(X_2=1)\times P(Y=3)=\frac{2}{3}\times\frac{4}{9}=\frac{8}{27}$

(3) $P(X_2=1,\,Y=3)$ の値は，$X_1=2$，$X_2=1$ となるときの確率であるから

$$P(X_2=1,\,Y=3)=P(X_1=2)\times P(X_2=1)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$$

(4) (2) および (3) の結果から
$P(X_2=1,\,Y=3)\fallingdotseq P(X_2=1)\times P(Y=3)$
であるから，X_2 と Y は互いに独立ではない．

2. 正規分布より
$E[X_1]=4$，$V[X_1]=1$，$E[X_2]=8$，$V[X_2]=4$

(1) $E\left[\frac{X_1+X_2}{3}\right]=\frac{1}{3}E[X_1+X_2]$
$$=\frac{1}{3}\Big(E[X_1]+E[X_2]\Big)=\frac{1}{3}(4+8)=4$$

(2) 平均値の性質により係数は外に出せるから
$$E\left[\frac{X_1X_2}{2}\right]=\frac{1}{2}E[X_1X_2]$$
また，X_1 と X_2 が互いに独立より
$$E[X_1X_2]=E[X_1]E[X_2]$$
よって，$E\left[\frac{X_1X_2}{2}\right]=\frac{1}{2}E[X_1]E[X_2]$
$$=\frac{1}{2}\times 4\times 8=16$$

(3) X_1 と X_2 が互いに独立より
$$V\left[4X_1+\frac{3}{2}X_2\right]=4^2V[X_1]+\left(\frac{3}{2}\right)^2V[X_2]$$
$$=16\times 1+\frac{9}{4}\times 4=25$$

3. 無作為に選んだ 5 本の丸棒の直径をそれぞれ $X_i\ (1\leqq i\leqq 5)$ とする．ここで，$E[X_i]=\mu=10$，$V[X_i]=\sigma^2=0.2^2$ である．
各 $X_i\ (1\leqq i\leqq 5)$ は互いに独立であるから

$$E[\overline{X}]=E\left[\frac{X_1+X_2+X_3+X_4+X_5}{5}\right]$$
$$=\frac{\mu\times 5}{5}=\mu=10$$
$$V[\overline{X}]=V\left[\frac{X_1+X_2+X_3+X_4+X_5}{5}\right]$$
$$=\frac{\sigma^2\times 5}{5^2}=\frac{\sigma^2}{5}=\left(\frac{0.2}{\sqrt{5}}\right)^2$$

すなわち，$\overline{X}$ は $N\left(10,\left(\frac{0.2}{\sqrt{5}}\right)^2\right)$ に従う．

$$P(9.85\leqq\overline{X}\leqq 10.15)$$
$$=P\left(\frac{9.85-10}{\frac{0.2}{\sqrt{5}}}\leqq Z\leqq\frac{10.15-10}{\frac{0.2}{\sqrt{5}}}\right)$$
$$=P\left(-\frac{3\sqrt{5}}{4}\leqq Z\leqq\frac{3\sqrt{5}}{4}\right)$$
$$=P\left(Z\geqq-\frac{3\sqrt{5}}{4}\right)-P\left(Z\geqq\frac{3\sqrt{5}}{4}\right)$$
$$=P\left(Z\leqq\frac{3\sqrt{5}}{4}\right)-P\left(Z\geqq\frac{3\sqrt{5}}{4}\right)$$
$$=\left\{1-P\left(Z\geqq\frac{3\sqrt{5}}{4}\right)\right\}-P\left(Z\geqq\frac{3\sqrt{5}}{4}\right)$$
$$=1-2\times P\left(Z\geqq\frac{3\sqrt{5}}{4}\right)$$
$$=1-2\times P(Z\geqq 1.68)=1-2\times 0.0465=0.907$$