第3章 5 「確率変数の関数」「統計量と標本分布」 第2回

解答

1. (1) $-2\,,\,-1\,,\,0\,,\,1\,,\,2$

k	-2	-1	0	1	2	計
$P(Y=k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

(2) $\dfrac{2}{27}$

(3) $\dfrac{1}{9}$

(4) 独立ではない

2. (1) $\dfrac{7}{2}$　(2) 12　(3) $\dfrac{37}{2}$

3. 0.9164

解説

1. (1) 復元抽出であるから，X_1 および X_2 はそれぞれ，0, 1, 2 の値をとり得る．
よって $Y=X_2-X_1$ のとり得る値は，小さい方から $-2\,,\,-1\,,\,0\,,\,1\,,\,2$ である．

$$P(Y=-2)=P(X_1=2, X_2=0)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

$$P(Y=-1)=P(X_1=1, X_2=0)+P(X_1=2, X_2=1)=\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times 2=\frac{2}{9}$$

$$P(Y=0)=P(X_1=0, X_2=0)+P(X_1=1, X_2=1)+P(X_1=2, X_2=2)=\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times 3=\frac{3}{9}$$

$$P(Y=1)=P(X_1=0, X_2=1)+P(X_1=1, X_2=2)=\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times 2=\frac{2}{9}$$

$$P(Y=2)=P(X_1=0, X_2=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

以上より，**解答**の確率分布表を得る．

(2) $P(X_1=1)\times P(Y=1)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{2}{27}$

(3) $P(X_1=1,\,Y=1)$ の値は，$X_1=1$，$X_2=2$ となるときの確率であるから

$$P(X_1=1,\,Y=1)=P(X_1=1)\times P(X_2=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

(4) (2) および (3) の結果から
$P(X_1=1,\,Y=1)\fallingdotseq P(X_1=1)\times P(Y=1)$
であるから，X_1 と Y は互いに独立ではない．

2. 2項分布より

$E[X_1]=8\times\dfrac{1}{2}=4$，$V[X_1]=8\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=2$

$E[X_2]=9\times\dfrac{1}{3}=3$，$V[X_2]=9\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=2$

(1)
$$E\left[\frac{X_1+X_2}{2}\right]=\frac{1}{2}E[X_1+X_2]=\frac{1}{2}\Big(E[X_1]+E[X_2]\Big)=\frac{1}{2}(4+3)=\frac{7}{2}$$

(2) X_1 と X_2 が互いに独立より
$E[X_1X_2]=E[X_1]E[X_2]=4\times 3=12$

(3) X_1 と X_2 が互いに独立より

$$V\left[3X_1+\frac{X_2}{2}\right]=3^2V[X_1]+\left(\frac{1}{2}\right)^2V[X_2]=9\times 2+\frac{1}{4}\times 2=18+\frac{1}{2}=\frac{37}{2}$$

3. 無作為に選んだ3缶の内容量を $X_i\,(1\leqq i\leqq 3)$ とする．
ここで，$E[X_i]=\mu=350\,, V[X_i]=\sigma^2=2^2$ である．
各 $X_i\,(1\leqq i\leqq 3)$ は互いに独立であるから

$$E[\overline{X}]=E\left[\frac{X_1+X_2+X_3}{3}\right]=\frac{\mu\times 3}{3}=\mu=350$$

$$V[\overline{X}]=V\left[\frac{X_1+X_2+X_3}{3}\right]=\frac{\sigma^2\times 3}{3^2}=\frac{\sigma^2}{3}=\frac{4}{3}$$

すなわち，$\overline{X}$ は $N\left(350\,,\,\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\right)$ に従う．

$$\begin{aligned}
&P(348\leqq\overline{X}\leqq 352)\\
&=P\left(\frac{348-350}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\leqq Z\leqq\frac{352-350}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)\\
&=P(-\sqrt{3}\leqq Z\leqq\sqrt{3})\\
&=P(Z\geqq-\sqrt{3})-P(Z\geqq\sqrt{3})\\
&=P(Z\leqq\sqrt{3})-P(Z\geqq\sqrt{3})\\
&=\left\{1-P(Z\geqq\sqrt{3})\right\}-P(Z\geqq\sqrt{3})\\
&=1-2\times P(Z\geqq\sqrt{3})\\
&=1-2\times P(Z\geqq 1.73)=1-2\times 0.0418=0.9164
\end{aligned}$$