日付	学科	学年	番号	名前
／				

第 4 章 5 「定数係数非斉次線形微分方程式」 第 1 回

例題 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dx}{dt} - 6x = 12t + 2$　　(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dx}{dt} - 6x = 2e^{2t}$　　(3) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dx}{dt} - 6x = 50\sin t$

解 (1) まず，斉次微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dx}{dt} - 6x = 0$ の一般解を求める．

特性方程式 $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ の解は $\lambda = -2,\ 3$ より $x = C_1e^{-2t} + C_2e^{3t}$ ($C_1,\ C_2$ は任意定数)

次に，微分方程式の右辺は 1 次式だから，1 つの解を $x = At + B$ ($A,\ B$ は定数) と予想して代入すると

$(At+B)'' - (At+B)' - 6(At+B) = 12t + 2$ より $-A - 6At - 6B = 12t + 2$

係数を比較して $-6A = 12,\ -A - 6B = 2$ より $A = -2,\ B = 0$ となり，1 つの解は $x = -2t$

よって，求める一般解は $x = -2t + C_1e^{-2t} + C_2e^{3t}$ ($C_1,\ C_2$ は任意定数)

(2) (1) と同様にして，斉次微分方程式を解くと，一般解は $x = C_1e^{-2t} + C_2e^{3t}$ ($C_1,\ C_2$ は任意定数)

次に，微分方程式の右辺は $2e^{2t}$ だから，教科書 p.123 を参考にして 1 つの解を $x = Ae^{2t}$ (A は定数) と予想して代入すると，$(Ae^{2t})'' - (Ae^{2t})' - 6Ae^{2t} = 2e^{2t}$ より $-4Ae^{2t} = 2e^{2t}$

係数を比較して $-4A = 2,\ A = -\dfrac{1}{2}$ となり，1 つの解は $x = -\dfrac{1}{2}e^{2t}$

よって，求める一般解は $x = -\dfrac{1}{2}e^{2t} + C_1e^{-2t} + C_2e^{3t}$ ($C_1,\ C_2$ は任意定数)

(3) (1) と同様にして，斉次微分方程式を解くと，一般解は $x = C_1e^{-2t} + C_2e^{3t}$ ($C_1,\ C_2$ は任意定数)

次に，微分方程式の右辺は $50\sin t$ だから，教科書 p.124 を参考にして 1 つの解を $x = A\cos t + B\sin t$ ($A,\ B$ は定数) と予想して代入すると $(A\cos t + B\sin t)'' - (A\cos t + B\sin t)' - 6(A\cos t + B\sin t) = 50\sin t$ より

$(-7B + A)\sin t + (-7A - B)\cos t = 50\sin t$

係数を比較して，$(-7A - B) = 0,\ A - 7B = 50$ より $A = 1,\ B = -7$ となり，1 つの解は $x = \cos t - 7\sin t$

よって，求める一般解は $x = \cos t - 7\sin t + C_1e^{-2t} + C_2e^{3t}$ ($C_1,\ C_2$ は任意定数)

1. 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dx}{dt} - 6x = 6t - 5$　　(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} - 6x = 4e^{-2t}$