日　付	学　科	学　年	番　　号	名　　前

第4章 3 「同次形」 第1回

例題 微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2t+x}{t}$ について, 次の問に答えよ.

(1) 微分方程式の右辺が $\dfrac{x}{t}$ の式として表すことができることを示せ.

(2) $u = \dfrac{x}{t}$ とおくことで, 微分方程式の一般解を求めよ.

(3) $t = 1$ のとき, $x = 1$ を満たす解を求めよ.

解

(1) 右辺の分母と分子を t で割ると, $\dfrac{\frac{2t+x}{t}}{\frac{t}{t}} = 2 + \dfrac{x}{t}$ となり, $\dfrac{x}{t}$ の式として表すことができる.

(2) $u = \dfrac{x}{t}$ とおくと, u は t の関数で, $x = tu$ だから, 両辺を t で微分すると, $\dfrac{dx}{dt} = u + \dfrac{du}{dt}t$

これらを微分方程式に代入すると, $u + \dfrac{du}{dt}t = 2 + u$ より $\dfrac{du}{dt}t = 2$ すなわち $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{2}{t}$

$\displaystyle\int du = \int \frac{2}{t}dt$ より $u = 2\log|t| + C$ （C は任意定数)

$x = tu$ より, 求める一般解は $x = t(2\log|t| + C)$ （C は任意定数)

(3) (2) と $t = 1$ のとき $x = 1$ より $1 = 1 \cdot (2\log 1 + C) = C$

よって, 求める解は $x = t(2\log|t| + 1)$

1. 微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2x^2 - tx}{2tx}$ について, 次の問に答えよ.

(1) 微分方程式の右辺が $\dfrac{x}{t}$ の式として表すことができることを示せ.

(2) $u = \dfrac{x}{t}$ とおくことで微分方程式の一般解を求めよ.

(3) $t = 1$ のとき $x = 1$ を満たす解を求めよ.