日　付	学　科	学　年	番　　号	名　　前

第１章２「級数」 第１回

例題 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ならば級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散することを用いて，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{2n+1}$ が発散することを証明せよ．

解答 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)\cdot\frac{1}{n}}{(2n+1)\cdot\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{2} \neq 0$ より級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{2n+1}$ は発散する．

1. 次の級数は発散することを証明せよ．

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+2}{n-2}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2-1}{n^2+n+4}$

例題 次の等比級数の収束・発散を調べ，収束するときは和を求めよ．

(1) $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots$

(2) $1-2+2^2-2^3+\cdots$

解答 初項が $a(\neq 0)$ で，公比が r の等比級数は $-1<r<1$ のときに限り収束して，その和は

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}$$

であることを用いる．

(1) 公比が $\dfrac{1}{3}$ の等比級数であるから収束する．和は $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots=\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}$

(2) 公比が -2 の等比級数であるから発散する．

2. 次の等比級数の収束・発散を調べ，収束するときは和を求めよ．

(1) $2+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots$

(2) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{3^3}+\cdots$

(3) $1+2+2^2+2^3+\cdots$

(4) $1+\sin\dfrac{\pi}{6}+\sin^2\dfrac{\pi}{6}+\cdots$

(5) $2+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots$

(6) $1+0.1+0.01+0.001+\cdots$