第 4 章 5 「定数係数非斉次線形微分方程式」 第 2 回

解答

$C_1,\ C_2$ は任意定数とする

1. (1) $x = 2t + 5 + (C_1 + C_2 t)e^t$

(2) $x = -t^2 - \dfrac{4}{3}t - \dfrac{14}{9} + C_1 e^{-3t} + C_2 e^t$

2. (1) $x = -\dfrac{1}{4}e^t + C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}$

(2) $x = -\dfrac{1}{5}e^{2t} + e^t(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$

3. (1) $x = -2\cos 2t + \dfrac{3}{2}\sin 2t + C_1 e^{-4t} + C_2 e^t$

(2) $x = -\dfrac{1}{8}\sin 3t + C_1 \cos t + C_2 \sin t$

解説

$C_1,\ C_2$ は任意定数とする

1. (1) まず, 斉次微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} + x = 0$ の一般解を求める．特性方程式 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ の解は $\lambda = 1$ (2 重解) より $x = (C_1 + C_2 t)e^t$

次に, 与えられた微分方程式の右辺は 1 次式だから, 1 つの解を $x = At + B$ ($A,\ B$ は定数) と予想して代入すると

$(At + B)'' - 2(At + B)' + (At + B) = 2t + 1$

$$At + (-2A + B) = 2t + 1$$

係数を比較して

$A = 2,\ -2A + B = 1$ より $A = 2,\ B = 5$

1 つの解は $x = 2t + 5$

よって, 求める一般解は

$$x = 2t + 5 + (C_1 + C_2 t)e^t$$

(2) 右辺 $= 0$ とおいた斉次微分方程式の一般解は

$$x = C_1 e^{-3t} + C_2 e^t$$

次に, 与えられた微分方程式の右辺は 2 次式だから, 1 つの解を $x = At^2 + Bt + C$ ($A,\ B,\ C$ は定数) と予想して代入すると

$(At^2 + Bt + C)'' + 2(At^2 + Bt + C)' - 3(At^2 + Bt + C) = 3t^2$

$-3At^2 + (4A - 3B)t + (2A + 2B - 3C) = 3t^2$

係数を比較して $-3A = 3,\ 4A - 3B = 0$

$2A + 2B - 3C = 0$ より

$$A = -1,\ B = -\frac{4}{3},\ C = -\frac{14}{9}$$

1 つの解は $x = -t^2 - \dfrac{4}{3}t - \dfrac{14}{9}$

よって, 求める一般解は

$$x = -t^2 - \frac{4}{3}t - \frac{14}{9} + C_1 e^{-3t} + C_2 e^t$$

2. (1) 右辺 $= 0$ とおいた斉次微分方程式の一般解は

$$x = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}$$

次に, 与えられた微分方程式の右辺は e^t だから, 1 つの解を $x = Ae^t$ (A は定数) と予想して代入すると

$(Ae^t)'' + (Ae^t)' - 6Ae^t = e^t$ より $-4Ae^t = e^t$

係数を比較して $-4A = 1$ より $A = -\dfrac{1}{4}$

1 つの解は $x = -\dfrac{1}{4}e^t$

よって, 求める一般解は

$$x = -\frac{1}{4}e^t + C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}$$

(2) 右辺 $= 0$ とおいた斉次微分方程式の一般解は

$$x = e^t(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$$

次に, 与えられた微分方程式の右辺は e^{2t} の定数倍だから, 1 つの解を $x = Ae^{2t}$(A は定数) と予想して代入すると

$(Ae^{2t})'' - 2(Ae^{2t})' + 5Ae^{2t} = -e^{2t}$ より

$$5Ae^{2t} = -e^{2t}$$

係数を比較して $5A = -1$ より $A = -\dfrac{1}{5}$

1 つの解は $x = -\dfrac{1}{5}e^{2t}$

よって, 求める一般解は

$$x = -\frac{1}{5}e^{2t} + e^t(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$$

3. (1) 右辺 $= 0$ とおいた斉次微分方程式の一般解は

$$x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^t$$

次に, 与えられた微分方程式の右辺は $\cos 2t$ だから, 1 つの解を

$x = A\cos 2t + B\sin 2t$ ($A,\ B$ は定数) と予想して微分方程式に代入すると

$(A\cos 2t + B\sin 2t)'' + 3(A\cos 2t + B\sin 2t)' - 4(A\cos 2t + B\sin 2t) = 25\cos 2t$

$(-8A + 6B)\cos 2t + (-6A - 8B)\sin 2t = 25\cos 2t$

係数を比較して

$-8A + 6B = 25,\ -6A - 8B = 0$ より

$$A = -2,\ B = \frac{3}{2}$$

1 つの解は $x = -2\cos 2t + \dfrac{3}{2}\sin 2t$

よって, 求める一般解は

$$x = -2\cos 2t + \frac{3}{2}\sin 2t + C_1 e^{-4t} + C_2 e^t$$

(2) 右辺 $= 0$ とおいた斉次微分方程式の一般解は

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

次に, 微分方程式の右辺は $\sin 3t$ だから, 1 つの解を $x = A\cos 3t + B\sin 3t$ ($A,\ B$ は定数) と予想して微分方程式に代入すると

$(A\cos 3t + B\sin 3t)'' + (A\cos 3t + B\sin 3t) = \sin 3t$ より $-8A\cos 3t - 8B\sin 3t = \sin 3t$

係数を比較して $-8A = 0,\ -8B = 1$ より

$$A = 0,\ B = -\frac{1}{8}$$

1 つの解は $x = -\dfrac{1}{8}\sin 3t$

よって, 求める一般解は

$$x = -\frac{1}{8}\sin 3t + C_1 \cos t + C_2 \sin t$$