第 4 章 5 「定数係数非斉次線形微分方程式」 第 1 回

解答

$C_1,\ C_2$ は任意定数とする

1. (1) $x = -t + 1 + C_1e^{-2t} + C_2e^{3t}$

(2) $x = -e^{-2t} + C_1e^{-3t} + C_2e^{2t}$

解説

$C_1,\ C_2$ は任意定数とする

1. (1) まず, 斉次微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dx}{dt} - 6x = 0$ の解を求める. 特性方程式より $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$

これを解くと $\lambda = -2,\ 3$

よって, 一般解は $x = C_1e^{-2t} + C_2e^{3t}$

次に, 微分方程式の右辺は 1 次式なので,

1 つの解を $x = At + B$ ($A,\ B$ は定数) と予想して微分方程式に代入すると

$(At+B)'' - (At+B)' - 6(At+B) = 6t - 5$

より $-6At + (-A - 6B) = 6t - 5$

両辺の係数を比較して

$$-6A = 6,\ -A - 6B = -5$$

これを解くと $A = -1,\ B = 1$

1 つの解は $x = -t + 1$

よって求める一般解は

$$x = -t + 1 + C_1e^{-2t} + C_2e^{3t}$$

(2) まず, 斉次微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} - 6x = 0$ の解を求める. 特性方程式より $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$

これを解くと $\lambda = -3,\ 2$

よって, 一般解は $x = C_1e^{-3t} + C_2e^{2t}$

次に, 微分方程式の右辺は $4e^{-2t}$ より

例題 (2) を参考にして, 1 つの解を

$x = Ae^{-2t}$ (A は定数) と予想して微分方程式に代入すると

$(Ae^{-2t})'' + (Ae^{-2t})' - 6(Ae^{-2t}) = 4e^{-2t}$

$4Ae^{-2t} - 2Ae^{-2t} - 6Ae^{-2t} = 4e^{-2t}$ より

$$-4Ae^{-t} = 4e^{-t}$$

両辺の係数を比較して

$-4A = 4$ より $A = -1$

1 つの解は $x = -e^{-2t}$

よって, 求める一般解は

$$x = -e^{-2t} + C_1e^{-3t} + C_2e^{2t}$$