第 4 章 4 「定数係数斉次線形微分方程式」 第 3 回

解答

$C_1,\ C_2$ は任意定数とする

1. (1) $x = C_1e^{-4t} + C_2e^t$

(2) $x = C_1e^{-6t} + C_2$

(3) $x = (C_1 + C_2t)e^{2t}$

(4) $x = e^t(C_1 \cos\sqrt{3}t + C_2 \sin\sqrt{3}t)$

2. (1) $x = -e^{-3t} + 2e^t$

(2) $x = e^t$

3. (1) $x = e^{2t}(\cos t - 2\sin t)$

(2) $x = e^{2t}(\cos t + \sin t)$

解説

$C_1,\ C_2$ は任意定数とする

1. (1) 特性方程式より $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$

これを解くと $\lambda = -4,\ 1$

よって, 求める一般解は

$$x = C_1e^{-4t} + C_2e^t$$

(2) 特性方程式より $\lambda^2 + 6\lambda = 0$

これを解くと $\lambda = -6,\ 0$

よって, 求める一般解は

$$x = C_1e^{-6t} + C_2$$

(3) 特性方程式より $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

これを解くと $\lambda = 2$ (2 重解)

よって, 求める一般解は

$$x = (C_1 + C_2t)e^{2t}$$

(4) 特性方程式より $\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$

これを解くと $\lambda = 1 \pm \sqrt{3}i$

よって, 求める一般解は

$$x = e^t(C_1 \cos\sqrt{3}t + C_2 \sin\sqrt{3}t)$$

2. (1) 特性方程式より $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$

これを解くと $\lambda = -3,\ 1$

よって, 求める一般解は

$$x = C_1e^{-3t} + C_2e^t$$

これより $\dfrac{dx}{dt} = -3C_1e^{-3t} + C_2e^t$

$t = 0,\ \dfrac{dx}{dt} = 5$ を代入すると $5 = -3C_1 + C_2$

一般解 $x = C_1e^{-3t} + C_2e^t$ に $t = 0,\ x = 1$ を代入すると $1 = C_1 + C_2$

これらを連立して $C_1 = -1,\ C_2 = 2$

よって, 求める解は $x = -e^{-3t} + 2e^t$

(2) (1) と同様に一般解 $x = C_1e^{-3t} + C_2e^t$ に $t = 0,\ x = 1$ および $t = 1,\ x = e$ を代入すると $1 = C_1 + C_2,\ e = C_1e^{-3} + C_2e$

これらを連立して $C_1 = 0,\ C_2 = 1$

よって, 求める解は $x = e^t$

3. (1) 特性方程式より $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$

これを解くと $\lambda = 2 \pm i$

よって, 求める一般解は

$$x = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$$

$\dfrac{dx}{dt} = 2e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{2t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t)$

$t = 0,\ \dfrac{dx}{dt} = 0$ を代入すると $0 = 2C_1 + C_2$

$x = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$ に $t = 0,\ x = 1$ を代入すると $1 = C_1$ より $C_2 = -2$

よって, 求める解は $x = e^{2t}(\cos t - 2\sin t)$

(2) (1) と同様に

一般解 $x = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$ に $t=0, x=1$ および $t=\dfrac{\pi}{2}, x = e^{\pi}$ を代入すると $1 = C_1,\ e^{\pi} = e^{\pi}C_2$ より

$$C_1 = 1,\ C_2 = 1$$

よって, 求める解は $x = e^{2t}(\cos t + \sin t)$