第4章 4 「定数係数斉次線形微分方程式」 第2回

解答

$C_1,\ C_2$ は任意定数とする

1. (1) $x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-t}$

(2) $x = (C_1 + C_2 t)e^{5t}$

(3) $x = C_1 \cos\sqrt{3}t + C_2 \sin\sqrt{3}t$

(4) $x = e^{-t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)$

2. (1) $x = -\dfrac{1}{2}e^{-2t} + \dfrac{3}{2}$

(2) $x = e^{-2t}$

3. (1) $x = \cos 3t + \dfrac{1}{3}\sin 3t$ (2) $x = \sin 3t$

解説

$C_1,\ C_2$ は任意定数とする

1. (1) 特性方程式より $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$

これを解くと $\lambda = -4,\ -1$

よって, 求める一般解は

$$x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-t}$$

(2) 特性方程式より $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$

これを解くと $\lambda = 5$ (2 重解)

よって, 求める一般解は

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{5t}$$

(3) 特性方程式より $\lambda^2 + 3 = 0$

これを解くと $\lambda = \pm\sqrt{3}i$

よって, 求める一般解は

$$x = C_1 \cos\sqrt{3}t + C_2 \sin\sqrt{3}t$$

(4) 特性方程式より $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$

これを解くと $\lambda = -1 \pm 3i$

よって, 求める一般解は

$$x = e^{-t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)$$

2. (1) 特性方程式より $\lambda^2 + 2\lambda = 0$

これを解くと $\lambda = -2,\ 0$

よって, 求める一般解は

$x = C_1 e^{-2t} + C_2$ ($C_1,\ C_2$は任意定数)

これより $\dfrac{dx}{dt} = -2C_1 e^{-2t}$

$t = 0,\ \dfrac{dx}{dt} = 1$ を代入すると $1 = -2C_1$

一般解 $x = C_1 e^{-2t} + C_2$ に

$t = 0,\ x = 1$ を代入すると $1 = C_1 + C_2$ より

これらを連立して $C_1 = -\dfrac{1}{2},\ C_2 = \dfrac{3}{2}$

よって求める解は $x = -\dfrac{1}{2}e^{-2t} + \dfrac{3}{2}$

(2) (1) と同様に一般解に

$t = 0, x = 1$ および $t = 1,\ x = \dfrac{1}{e^2}$ を代入すると $1 = C_1 + C_2,\ e^{-2} = C_1 e^{-2} + C_2$

これらを連立して $C_1 = 1,\ C_2 = 0$

よって, 求める解は $x = e^{-2t}$

3. (1) 特性方程式より $\lambda^2 + 9 = 0$

これを解くと $\lambda = \pm 3i$

よって, 求める一般解は

$$x = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t$$

$$\frac{dx}{dt} = -3C_1 \sin t + 3C_2 \cos t$$

$t = 0,\ \dfrac{dx}{dt} = 1$ を代入すると $1 = 3C_2$

$x = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t$ に

$t = 0,\ x = 1$ を代入すると $1 = C_1$ より

$$C_1 = 1,\ C_2 = \frac{1}{3}$$

よって, 求める解は $x = \cos 3t + \dfrac{1}{3}\sin 3t$

(2) 一般解 $x = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t$ に

$t = 0,\ x = 0$ および

$t = \dfrac{\pi}{6},\ x = 1$ を代入すると

$$0 = C_1,\ 1 = C_2$$

よって, 求める解は $x = \sin 3t$