第4章 3 「同次形」 第3回

解答

C は任意定数とする

1. (1) $x = Ct^2 + t$

(2) $x^2 = Ct^3 - t^2$

(3) $x = \dfrac{Ct^4}{3} - \dfrac{t}{3}$

2. (1) $x = -t \log |-\log |t| + C|$

(2) $x = -t \log |-\log |t| + e|$

解説

$c,\ C$ は任意定数とする

1. (1) 右辺の分母と分子を t で割ると

$\dfrac{dx}{dt} = 2\left(\dfrac{x}{t}\right) - 1$

$u = \dfrac{x}{t}$ とおくと, u は t の関数で $x = tu$ だから, 両辺を t で微分して $\dfrac{dx}{dt} = u + t\dfrac{du}{dt}$

微分方程式に代入して

$u + t\dfrac{du}{dt} = 2u - 1$ より $t\dfrac{du}{dt} = u - 1$

$$\frac{1}{u-1}\frac{du}{dt} = \frac{1}{t}$$

$\displaystyle\int \frac{1}{u-1}du = \int \frac{1}{t}dt$ より

$$\log |u-1| = \log |t| + c$$

$\log \left|\dfrac{u-1}{t}\right| = c$ より $u = \pm e^c t + 1$

$C = \pm e^c$ とおくと $u = Ct + 1$

$u = \dfrac{x}{t}$ より $\dfrac{x}{t} = Ct + 1$

よって, 求める一般解は $x = Ct^2 + t$

(2) 右辺の第2項の分母と分子を t^2 で割ると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} + \frac{1 + \left(\dfrac{x}{t}\right)^2}{2\left(\dfrac{x}{t}\right)}$$

$u = \dfrac{x}{t}$ とおくと, u は t の関数で $x = tu$ だから, 両辺を t で微分して $\dfrac{dx}{dt} = u + t\dfrac{du}{dt}$

微分方程式に代入して

$u + t\dfrac{du}{dt} = u + \dfrac{1+u^2}{2u}$ より $t\dfrac{du}{dt} = \dfrac{1+u^2}{2u}$

$$\frac{2u}{1+u^2}\frac{du}{dt} = \frac{1}{t}$$

$\displaystyle\int \frac{2u}{1+u^2}du = \int \frac{1}{t}dt$ より

$$\log |1+u^2| = \log |t| + c$$

$\log \left|\dfrac{1+u^2}{t}\right| = c$ より $\dfrac{1+u^2}{t} = \pm e^c$

$C = \pm e^c$ とおくと, $\dfrac{1+u^2}{t} = C$ より

$$u^2 = Ct - 1$$

$u = \dfrac{x}{t}$ より $\dfrac{x^2}{t^2} = Ct - 1$

よって, 求める一般解は $x^2 = Ct^3 - t^2$

(3) 両辺を t で割ると $\dfrac{dx}{dt} = 4\left(\dfrac{x}{t}\right) + 1$

$u = \dfrac{x}{t}$ とおくと, u は t の関数で $x = tu$ だから, 両辺を t で微分して $\dfrac{dx}{dt} = u + t\dfrac{du}{dt}$

微分方程式に代入して

$u + t\dfrac{du}{dt} = 4u + 1$ より $t\dfrac{du}{dt} = 3u + 1$

$$\frac{1}{3u+1}\frac{du}{dt} = \frac{1}{t}$$

$\displaystyle\int \frac{1}{3u+1}du = \int \frac{1}{t}dt$ より

$$\frac{1}{3}\log |3u+1| = \log |t| + c$$

$\log |3u+1| = 3\log |t| + 3c = \log |t^3| + 3c$

$\log \left|\dfrac{3u+1}{t^3}\right| = 3c$ より $\dfrac{3u+1}{t^3} = \pm e^{3c}$

$u = \dfrac{\pm e^{3c}t^3}{3} - \dfrac{1}{3}$ より $C = \pm e^{3c}$ とおくと

$$u = \frac{Ct^3}{3} - \frac{1}{3}$$

$u = \dfrac{x}{t}$ より $\dfrac{x}{t} = \dfrac{Ct^3}{3} - \dfrac{1}{3}$

よって, 求める一般解は

$$x = \frac{Ct^4}{3} - \frac{t}{3}$$

2. (1) $u = \dfrac{x}{t}$ とおくと, 右辺は $u + e^u$ となる.

u は t の関数で $x = tu$ だから, 両辺を t で微分して $\dfrac{dx}{dt} = u + t\dfrac{du}{dt}$

微分方程式に代入して

$u + t\dfrac{du}{dt} = u + e^u$ より $t\dfrac{du}{dt} = e^u$

両辺を $\dfrac{1}{te^u}$ で割ると, $e^{-u}\dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{t}$

$\displaystyle\int e^{-u}du = \int \frac{1}{t}$ より $-e^{-u} = \log |t| + c$

$e^{-u} = -\log |t| - c$ より両辺の対数をとると

$-u = \log |-\log |t| - c|$ より

$$u = -\log |-\log |t| - c|$$

$C = -c$ とおくと $u = -\log |-\log |t| + C|$

$u = \dfrac{x}{t}$ より $\dfrac{x}{t} = -\log |-\log |t| + C|$

よって, 求める一般解は

$$x = -t\log |-\log |t| + C|$$

(2) 一般解に $t = 1,\ x = -1$ を代入すると

$-1 = -\log |-\log 1 + C|$ より $-1 = -\log C$

$1 = \log C$ より $C = e$

よって, 求める解は

$$x = -t\log |-\log |t| + e|$$