第4章 3 「同次形」 第2回

解答

C は任意定数とする

1. (1) $x = Ct^2 - 4t$

(2) $x^2 = t^2(-2\log|t| + C)$

(3) $x^2 = t^2(2\log|t| + C)$

2. (1) $x^2 = \dfrac{t^2}{-6\log|t| + C}$

(2) $x^2 = \dfrac{t^2}{-6\log|t| + 4}$

解説

$c,\ C$ は任意定数とする

1. (1) 右辺の分母と分子を t で割ると

$\dfrac{dx}{dt} = 2\left(\dfrac{x}{t}\right) + 4$

$u = \dfrac{x}{t}$ とおくと, u は t の関数で $x = tu$ だから, 両辺を t で微分して $\dfrac{dx}{dt} = u + t\dfrac{du}{dt}$

微分方程式に代入して

$u + t\dfrac{du}{dt} = 2u + 4$ より $t\dfrac{du}{dt} = u + 4$

両辺に $\dfrac{1}{t(u+4)}$ をかけると

$\dfrac{1}{u+4}\dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{t}$

$\displaystyle\int \frac{1}{u+4}du = \int \frac{1}{t}dt$ より

$\log|u+4| = \log|t| + c$

$\log\left|\dfrac{u+4}{t}\right| = c$ より $C = \pm e^c$ とおくと

$u = Ct - 4$

$u = \dfrac{x}{t}$ より $\dfrac{x}{t} = Ct - 4$

よって, 求める一般解は $x = Ct^2 - 4t$

(2) 右辺の分母と分子を t^2 で割ると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\left(\frac{x}{t}\right)^2 - 1}{\frac{x}{t}}$$

$u = \dfrac{x}{t}$ とおくと, u は t の関数で $x = tu$ だから, 両辺を t で微分して $\dfrac{dx}{dt} = u + t\dfrac{du}{dt}$

微分方程式に代入して

$u + t\dfrac{du}{dt} = \dfrac{u^2 - 1}{u} = u - \dfrac{1}{u}$ より $t\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{1}{u}$

$u\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{1}{t}$

$\displaystyle\int udu = \int\left(-\frac{1}{t}\right)dt$ より

$\dfrac{1}{2}u^2 = -\log|t| + c$

$u^2 = -2\log|t| + 2c$

$C = 2c$ とおくと $u^2 = -2\log|t| + C$

$u = \dfrac{x}{t}$ より $\dfrac{x^2}{t^2} = -2\log|t| + C$

よって, 求める一般解は $x^2 = t^2(-2\log|t| + C)$

(3) $u = \dfrac{x}{t}$ とおくと, $\dfrac{dx}{dt} = u + \dfrac{1}{u}$

u は t の関数で $x = tu$ だから, 両辺を t で微分して $\dfrac{dx}{dt} = u + t\dfrac{du}{dt}$

微分方程式に代入して

$u + t\dfrac{du}{dt} = u + \dfrac{1}{u}$ より $t\dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{u}$

$u\dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{t}$

$\displaystyle\int udu = \int \frac{1}{t}dt$ より $\dfrac{1}{2}u^2 = \log|t| + c$

$u^2 = 2\log|t| + 2c$

$C = 2c$ とおくと, $u^2 = 2\log|t| + C$

$u = \dfrac{x}{t}$ より $\dfrac{x^2}{t^2} = 2\log|t| + C$

よって, 求める一般解は $x^2 = t^2(2\log|t| + C)$

2. (1) $u = \dfrac{x}{t}$ とおくと, $\dfrac{dx}{dt} = 3u^3 + u$

u は t の関数で $x = tu$ だから, 両辺を t で微分して $\dfrac{dx}{dt} = u + t\dfrac{du}{dt}$

微分方程式に代入して

$u + t\dfrac{du}{dt} = 3u^3 + u$ より $t\dfrac{du}{dt} = 3u^3$

$\dfrac{1}{u^3}\dfrac{du}{dt} = \dfrac{3}{t}$

$\displaystyle\int \frac{1}{u^3}du = \int \frac{3}{t}dt$ より

$-\dfrac{1}{2u^2} = 3\log|t| + c$

$u^2 = \dfrac{1}{-6\log|t| - 2c}$

$C = -2c$ とおくと $u^2 = \dfrac{1}{-6\log|t| + C}$

$u = \dfrac{x}{t}$ より $\dfrac{x^2}{t^2} = \dfrac{1}{-6\log|t| + C}$

よって, 求める一般解は

$x^2 = \dfrac{t^2}{-6\log|t| + C}$

(2) (1) の一般解に $t = 1,\ x = \dfrac{1}{2}$ を代入すると

$\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{C}$ より $C = 4$

よって, 求める解は $x^2 = \dfrac{t^2}{-6\log|t| + 4}$