第4章 2 「1階線形微分方程式」 第2回

解答

C は任意定数とする

1. (1) $x = 2t + \dfrac{C}{t}$

(2) $x = 3t^2 + 2t\log|t| + Ct$

(3) $x = (3t + C)e^{2t^2}$ (4) $x = (t^3 + C)e^{\sin t}$

2. $x = t^5 + t^3 + 2t^2 + 2$

解説

c, C は任意定数とする

1. (1) $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{x}{t} = 0$ の一般解を求める.

$\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{x}{t}$ より $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \int \left(-\frac{1}{t}\right)dt$

$\log|x| = -\log|t| + c$, $\log|x||t| = c$ より

$C = \pm e^c$ とおくと, 一般解は $x = \dfrac{C}{t}$

定数 C を t の関数 $u = C(t)$ で置き換えると

$x = \dfrac{u}{t} = u\dfrac{1}{t}$ 両辺を t で微分して

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}\cdot\frac{1}{t} + u\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

微分方程式に代入して

$$\frac{1}{t}\frac{du}{dt} - \frac{u}{t^2} + \frac{u}{t^2} = 4$$

$\dfrac{1}{t}\dfrac{du}{dt} = 4$ より $\dfrac{du}{dt} = 4t$

$$\int du = \int 4tdt = 2t^2 + C$$

$u = 2t^2 + C$ より

$x = \dfrac{u}{t}$ に代入すると, 求める一般解は

$$x = 2t + \frac{C}{t}$$

(2) $\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{x}{t} = 0$ の一般解を求める.

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{t}$ より $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{t}dt$

$$\log|x| = \log|t| + c$$

$\log\dfrac{|x|}{|t|} = c$ より $C = \pm e^c$ とおくと, 一般解は

$$x = Ct$$

定数 C を t の関数 $u = C(t)$ で置き換えると

$x = ut$ 両辺を t で微分して

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}\cdot t + u$$

微分方程式に代入して

$t\dfrac{du}{dt} = 3t + 2$ より $\dfrac{du}{dt} = 3 + \dfrac{2}{t}$

$$\int du = \int\left(3 + \frac{2}{t}\right)dt = 3t + 2\log|t| + C$$

$u = 3t + 2\log|t| + C$ より, 求める一般解は

$$x = 3t^2 + 2t\log|t| + Ct$$

(3) $\dfrac{dx}{dt} - 4tx = 0$ の一般解を求める.

$\dfrac{dx}{dt} = 4tx$ より $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \int 4tdt$

$\log|x| = 2t^2 + c$ より C を $\pm e^c$ とおくと

一般解は $x = Ce^{2t^2}$

定数 C を t の関数 $u = C(t)$ で置き換えると

$x = ue^{2t^2}$ 両辺を t で微分して

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}\cdot e^{2t^2} + u\cdot 4te^{2t^2}$$

微分方程式に代入して

$e^{2t^2}\dfrac{du}{dt} = 3e^{2t^2}$ より $\dfrac{du}{dt} = 3$

$$\int du = \int 3dt = 3t + C$$

$u = 3t + C$ より, 求める一般解は

$$x = (3t + C)e^{2t^2}$$

(4) $\dfrac{dx}{dt} - x\cos t = 0$ の一般解を求める.

$\dfrac{dx}{dt} = x\cos t$ より $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \int \cos tdt$

$\log|x| = \sin t + c$ より C を $\pm e^c$ とおくと

一般解は $x = Ce^{\sin t}$

定数 C を t の関数 $u = C(t)$ で置き換えると

$x = ue^{\sin t}$ 両辺を t で微分して

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}e^{\sin t} + u\cdot\cos te^{\sin t}$$

微分方程式に代入して

$$\frac{du}{dt}e^{\sin t} + u\cos te^{\sin t} - ue^{\sin t}\cdot\cos t = 3t^2e^{\sin t}$$

$\dfrac{du}{dt}e^{\sin t} = 3t^2e^{\sin t}$ より $\dfrac{du}{dt} = 3t^2$

$$\int du = \int 3t^2dt = t^3 + C$$

$u = t^3 + C$ より, 求める一般解は

$$x = (t^3 + C)e^{\sin t}$$

2. $\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{2tx}{t^2+1} = 0$ の一般解を求める.

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2tx}{t^2+1}$ より $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{2t}{t^2+1}dt$

$t^2 + 1 = s$ とおくと, $2tdt = ds$ より

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{2t}{t^2+1}dt = \int \frac{1}{s}ds = \log|s| + c$$

$= \log|t^2+1| + c$

$$\log|x| = \log|t^2+1| + c$$

$\log\dfrac{|x|}{|t^2+1|} = c$ より C を $\pm e^c$ とおくと, 一般解は

$$x = C(t^2+1)$$

定数 C を t の関数 $u = C(t)$ で置き換えると

$x = u(t^2+1)$ 両辺を t で微分して

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}(t^2+1) + u\cdot 2t$$

微分方程式に代入して

$\dfrac{du}{dt}(t^2+1) = 3t^4 + 3t^2$ より $\dfrac{du}{dt} = 3t^2$

$\displaystyle\int du = \int 3t^2dt = t^3 + C$, $u = t^3 + C$ より

一般解は $x = (t^3 + C)(t^2 + 1)$

初期条件「$t = 0,\ x = 2$」を代入すると $2 = C$ より

求める解は $x = t^5 + t^3 + 2t^2 + 2$