第 4 章 2 「1 階線形微分方程式」 第 1 回

解答

C は任意定数とする

1. (1) $x = t^4 + Ct$

(2) $x = (2t + C)e^t$

(3) $x = 1 + Ce^{-2t^2}$

(4) $x = (t^2 + C)e^{-t^3}$

解説

$c,\ C$ は任意定数とする

1. (1) $\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{x}{t} = 0$ の一般解を求める.

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{t}$ より $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{t}dt$

$\log|x| = \log|t| + c$

$\log\dfrac{|x|}{|t|} = c$ より $C = \pm e^c$ とおくと, 一般解は

$x = Ct$

定数 C を t の関数 $u = C(t)$ で置き換えると

$x = ut$

両辺を t で微分して $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{du}{dt}t + u$

微分方程式に代入して $\dfrac{du}{dt}t + u - \dfrac{ut}{t} = 3t^3$

$\dfrac{du}{dt}t = 3t^3$ より $\dfrac{du}{dt} = 3t^2$

$\displaystyle\int du = \int 3t^2dt = t^3 + C$

$u = t^3 + C$ より $x = ut$ に代入すると

求める一般解は $x = t^4 + Ct$

(2) $\dfrac{dx}{dt} - x = 0$ の一般解を求める.

$\dfrac{dx}{dt} = x$ より $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \int dt$

$\log|x| = t + c$

C を $\pm e^c$ とおくと, 一般解は $x = Ce^t$

定数 C を t の関数 $u = C(t)$ で置き換えると

$x = ue^t$

両辺を t で微分して $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{du}{dt}e^t + ue^t$

微分方程式に代入して $\dfrac{du}{dt}e^t + ue^t - ue^t = 2e^t$

$\dfrac{du}{dt}e^t = 2e^t$ より $\dfrac{du}{dt} = 2$

$\displaystyle\int du = \int 2dt = 2t + C$

$u = 2t + C$ より $x = ue^t$ に代入すると

求める一般解は $x = (2t + C)e^t$

(3) $\dfrac{dx}{dt} + 4tx = 0$ の一般解を求める.

$\dfrac{dx}{dt} = -4tx$ より $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \int(-4t)dt$

$\log|x| = -2t^2 + c$

C を $\pm e^c$ とおくと, 一般解は $x = Ce^{-2t^2}$

定数 C を t の関数 $u = C(t)$ で置き換えると

$x = ue^{-2t^2}$

両辺を t で微分して

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{du}{dt}e^{-2t^2} - 4tue^{-2t^2}$

微分方程式に代入して

$\dfrac{du}{dt}e^{-2t^2} - 4tue^{-2t^2} + 4t \cdot ue^{-2t^2} = 4t$

$\dfrac{du}{dt}e^{-2t^2} = 4t$ より $\dfrac{du}{dt} = 4te^{2t^2}$

$\displaystyle\int du = \int 4te^{2t^2}dt$ において

$2t^2 = s$ とおくと $4tdt = ds$ より

$\displaystyle\int du = \int 4te^{2t^2}dt = \int e^s ds = e^s + C$

$= e^{2t^2} + C$

$u = e^{2t^2} + C$ より $x = ue^{-2t^2}$ に代入すると

求める一般解は

$x = (e^{2t^2} + C)e^{-2t^2} = 1 + Ce^{-2t^2}$

(4) $\dfrac{dx}{dt} + 3t^2x = 0$ の一般解を求める.

$\dfrac{dx}{dt} = -3t^2x$ より $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \int(-3t^2)dt$

$\log|x| = -t^3 + c$

C を $\pm e^c$ とおくと, 一般解は $x = Ce^{-t^3}$

定数 C を t の関数 $u = C(t)$ で置き換えると

$x = ue^{-t^3}$

両辺を t で微分して

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{du}{dt}e^{-t^3} - 3t^2ue^{-t^3}$

微分方程式に代入して

$\dfrac{du}{dt}e^{-t^3} - 3t^2ue^{-t^3} + 3t^2 \cdot ue^{-t^3} = 2te^{-t^3}$

$\dfrac{du}{dt}e^{-t^3} = 2te^{-t^3}$ より $\dfrac{du}{dt} = 2t$

$\displaystyle\int du = \int 2tdt = t^2 + C$

$u = t^2 + C$ より $x = ue^{-t^3}$ に代入すると

求める一般解は $x = (t^2 + C)e^{-t^3}$