第 4 章 1 「変数分離形」 第 3 回

解答

C は任意定数とする

1. (1) $\dfrac{1}{2}e^{t^2}+C$

(2) $\sin^{-1}x+C$

2. (1) $x^2=4t^2+C$

(2) $x^2=\dfrac{1}{2}e^{t^2}+C$

(3) $x=\log|-e^{-t}+C|$

(4) $x=\sin(t^2+C)$

3. $\cos x=\sin t-1$

解説

c, C はそれぞれ任意定数とする

1. (1) $t^2=s$ とおくと $2tdt=ds$ より

$$\int te^{t^2}dt=\int\frac{1}{2}e^s ds=\frac{1}{2}e^s+C$$
$$=\frac{1}{2}e^{t^2}+C$$

(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{a}+C$ より

$a=1$ とすると, $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1^2-x^2}}=\sin^{-1}x+C$

2. (1) 両辺に x をかけると $x\dfrac{dx}{dt}=4t$

両辺を t について積分すると

$$\int xdx=\int 4tdt$$
$$\frac{1}{2}x^2=2t^2+c$$

$x^2=4t^2+2c$ より $C=2c$ とおくと, 求める一般解は $x^2=4t^2+C$

(2) 両辺に $2xt$ をかけると $2x\dfrac{dx}{dt}=te^{t^2}$

両辺を t について積分すると

$$\int 2xdx=\int te^{t^2}dt$$

1.(1) より $\displaystyle\int te^{t^2}dt=\frac{1}{2}e^{t^2}+C$

よって, 求める一般解は $x^2=\dfrac{1}{2}e^{t^2}+C$

(3) 両辺に e^xをかけると $e^x\dfrac{dx}{dt}=e^{-t}$

両辺を t について積分すると

$$\int e^x dx=\int e^{-t}dt$$
$$e^x=-e^{-t}+C$$

両辺の対数をとると, $\log e^x=\log|-e^{-t}+C|$

$\log e^x=x$ より求める一般解は

$$x=\log|-e^{-t}+C|$$

(4) 両辺を$\sqrt{1-x^2}$で割ると $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\dfrac{dx}{dt}=2t$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int 2tdt$$

1.(2) より $\sin^{-1}x=t^2+C$

$\sin^{-1}x=y\iff x=\sin y$ の性質を用いて

求める一般解は

$$x=\sin(t^2+C)$$

3. 両辺に $\sin x$ をかけると, $\sin x\dfrac{dx}{dt}=-\cos t$

両辺を t について積分すると

$$\int\sin xdx=\int(-\cos t)dt$$
$$-\cos x=-\sin t+c$$
$$\cos x=\sin t-c$$

$C=-c$ とおくと一般解は

$$\cos x=\sin t+C$$

ここで $t=0$ のとき $x=\pi$ なので

$-1=0+C$ より $C=-1$

よって, 求める解は $\cos x=\sin t-1$