第4章 1 「変数分離形」 第1回

解答

C は任意定数とする

1. (1) 5 (2) 1 (3) 1

2. (1) $\log|t|+C$

(2) $\dfrac{1}{t}+C$

(3) $2\log(t^2+2)+C$

3. (1) $x=Ce^t$

(2) $x=Ce^{-t^2}$

(3) $x=\dfrac{C}{t^4}$

(4) $x=Ce^{\frac{1}{t}}$

4. $x=t^2+2$

解説

c, C はそれぞれ任意定数とする

1. (1) $\log_2 4+\log_2 8=\log_2(4\times 8)=\log_2 32$
$=\log_2 2^5=5\log_2 2=5\cdot 1=5$

(2) $\log_3 24-3\log_3 2=\log_3 24-\log_3 2^3$
$=\log_3 24-\log_3 8=\log_3 \dfrac{24}{8}=\log_3 3=1$

(3) $2\log\sqrt{e}=\log(\sqrt{e})^2=\log e=1$

2. (1) $\displaystyle\int \frac{1}{t}dt=\log|t|+C$

(2) $\displaystyle\int\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int t^{-2}dt=t^{-1}+C=\frac{1}{t}+C$

(3) $t^2+2=s$ とおくと, $2tdt=ds$ より
$\displaystyle\int\frac{4t}{t^2+2}dt=\int\frac{2}{s}ds=2\log|s|+C$
$=2\log|t^2+2|+C=2\log(t^2+2)+C$

3. 計算の途中で, $\log_e x=t \Longleftrightarrow x=e^t$ となる性質を用いることに注意せよ

(1) 両辺を x で割ると $\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt}=1$

両辺を t について積分すると $\displaystyle\int\frac{1}{x}dx=\int dt$

$\log|x|=t+c$

$|x|=e^{t+c}=e^ce^t$ より $x=\pm e^ce^t$

$C=\pm e^c$ とおくと, 求める一般解は

$x=Ce^t$

(2) 両辺を x で割ると $\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt}=-2t$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x}dx=\int(-2t)dt$$

$\log|x|=-t^2+c$

$|x|=e^{-t^2+c}=e^ce^{-t^2}$ より $x=\pm e^ce^{-t^2}$

$C=\pm e^c$ とおくと, 求める一般解は

$x=Ce^{-t^2}$

(3) 両辺を x で割ると $\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{4}{t}$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x}dx=\int\left(-\frac{4}{t}\right)dt$$

$\log|x|=-4\log|t|+c=-\log|t|^4+c$

$\log|x|+\log|t|^4=c$ より

$\log|x||t|^4=\log|x||t^4|=\log|xt^4|=c$

$|xt^4|=e^c$ より $xt^4=\pm e^c$

$C=\pm e^c$ とおくと，求める一般解は

$x=\dfrac{C}{t^4}$

(4) 両辺を x で割ると $\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{1}{t^2}$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x}dx=\int\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

2.(2) より $\log|x|=\dfrac{1}{t}+c$

$|x|=e^{\frac{1}{t}+c}=e^ce^{\frac{1}{t}}$ より $x=\pm e^ce^{\frac{1}{t}}$

$C=\pm e^c$ とおくと，求める一般解は

$x=Ce^{\frac{1}{t}}$

4. 両辺を x で割ると $\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t}{t^2+2}$

両辺を t について積分すると $\displaystyle\int\frac{1}{x}dx=\int\frac{2t}{t^2+2}dt$

2.(3) より $\log|x|=\log|t^2+2|+c$

$\log|x|-\log|t^2+2|=c$ より $\log\left|\dfrac{x}{t^2+2}\right|=c$

$\left|\dfrac{x}{t^2+2}\right|=e^c$ より $x=\pm e^c(t^2+2)$

$C=\pm e^c$ とおくと, $x=C(t^2+2)$

ここで $t=0$ のとき $x=2$ より

$2=C(0+2)$ であるから $C=1$ となり

求める解は $x=t^2+2$