

第2章 4 「極大・極小」 第2回

解答

1. (1) (1, 1) (2) (3, 4) (3) $(0, -\frac{1}{2}), (3, 4)$
 (4) (0, 0), (1, 1), (-1, -1)
2. (1) 点 (4, -3) で極小値 -11
 (2) 点 (-1, -1) で極大値 0

解説

1. (1) $z_x = 4x + 5y - 9 = 0$ より $4x + 5y = 9 \dots \textcircled{1}$
 $z_y = 5x - 2y - 3 = 0$ より $5x - 2y = 3 \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} \times 2 + \textcircled{2} \times 5$ より $33x = 33$ よって $x = 1$
 $\textcircled{1}$ より $y = 1$
 極値をとり得る点は (1, 1)
- (2) $z_x = 6x - 4y - 2 = 0$ より $3x - 2y = 1 \dots \textcircled{1}$
 $z_y = -4x + 4y - 4 = 0$ より $x - y = -1 \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2} \times 2$ より $x = 3$ $\textcircled{1}$ より $y = 4$
 極値をとり得る点は (3, 4)
- (3) $z_x = 3x^2 - 6y - 3 = 0$ より $x^2 - 2y = 1 \dots \textcircled{1}$
 $z_y = -6x + 4y + 2 = 0$ より $3x - 2y = 1 \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より $x^2 - 3x = 0, x(x - 3) = 0$
 $\therefore x = 0, 3$ $\textcircled{2}$ より $x = 0$ のとき $y = -\frac{1}{2}$
 $x = 3$ のとき $y = 4$
 極値をとり得る点は $(0, -\frac{1}{2}), (3, 4)$
- (4) $z_x = 4x - 4y = 0$ より $x = y \dots \textcircled{1}$
 $z_y = -4x + 4y^3 = 0$ より $x = y^3 \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ より $y^3 = y$
 $y^3 - y = y(y^2 - 1) = y(y + 1)(y - 1) = 0$
 $\therefore y = 0, \pm 1$
 $\textcircled{1}$ より $y = 0$ のとき $x = 0$
 $x = 1$ のとき $y = 1, x = -1$ のとき $y = -1$
 極値をとり得る点は (0, 0), (1, 1), (-1, -1)
2. (1) $z_x = 4x + 4y - 4 = 0$ より $x + y = 1 \dots \textcircled{1}$
 $z_y = 4x + 6y + 2 = 0$ より $2x + 3y = -1 \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2} - \textcircled{1} \times 2$ より $y = -3$
 $\textcircled{1}$ より $x = 4$
 極値をとり得る点は (4, -3)
 $z_{xx} = 4, z_{xy} = 4, z_{yy} = 6$
 $H = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = z_{xx}z_{yy} - (z_{xy})^2$
 $= 4 \cdot 6 - 4^2 = 8 > 0, z_{xx} = f_{xx} = 4 > 0$
 \therefore 極小
 $x = 4, y = -3$ のとき
 $z = 2 \cdot 4^2 + 4^2(-3) + 3 \cdot (-3)^2 - 4^2 - 6 = -11$
 よって点 (4, -3) で極小値 -11 をとる.

- (2) $z_x = 3x^2 + 4y + 1 = 0$
 $z_y = 4x - 4y = 0$ より $x = y \dots \textcircled{1}$
 よって $3x^2 + 4x + 1 = 0$
 $(x + 1)(3x + 1) = 0 \therefore x = -1, -\frac{1}{3}$
 $\textcircled{1}$ より $x = -1$ のとき $y = -1$
 $x = -\frac{1}{3}$ のとき $y = -\frac{1}{3}$
 極値をとり得る点は $(-1, -1), (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$
 $z_{xx} = 6x, z_{xy} = 4, z_{yy} = -4$
 点 $(-1, -1)$ において
 $z_{xx} = -6, z_{xy} = 4, z_{yy} = -4$
 $H = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = z_{xx}z_{yy} - (z_{xy})^2$
 $= -6 \cdot (-4) - 4^2 = 8 > 0$
 $z_{xx} = f_{xx} = -6 < 0 \therefore$ 極大
 よって点 $(-1, -1)$ で極大値 0 をとる.
 $x = -1, y = -1$ のとき
 $z = (-1)^3 + 4(-1)^2 - 2(-1)^2 - 1 = 0$
 点 $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ において
 $z_{xx} = -2, z_{xy} = 4, z_{yy} = -4$
 $H = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = z_{xx}z_{yy} - (z_{xy})^2$
 $= -2 \cdot (-4) - 4^2 = -8 < 0$
 \therefore 極値をとらない.