第２章 2 「全微分」 第３回

解答

1. (1) $dz=(6x^2y+3y^3)dx+(2x^3+9xy^2)dy$

(2) $dz=(4x^3y+2xy^2)dx+(x^4+2x^2y-3y^2)dy$

(3) $dz=(3x^2y-y^3)dx+(x^3-3xy^2)dy$

(4) $dz=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2-y^2}}dx-\dfrac{y}{\sqrt{2x^2-y^2}}dy$

(5) $dz=2e^{2x}\cos y dx-e^{2x}\sin y dy$

(6) $dz=\sin y dx+\{\sin y+(x+y)\cos y\}dy$

2. (1) $11x+2y-z=16$

(2) $x-3y-z=0$

(3) $7x+4y-z=2$

解説

1. (1) $z_x=(2x^3y+3xy^3)_x=2(x^3)'y+3(x)'y^3$

$=6x^2y+3y^3$

$z_y=(2x^3y+3xy^3)_y=2x^3(y)'+3x(y^3)'$

$=2x^3+9xy^2$

$dz=z_xdx+z_ydy$ に代入して

$dz=(6x^2y+3y^3)dx+(2x^3+9xy^2)dy$

(2) $z_x=(x^4y+x^2y^2-y^3)_x=(x^4)'y+(x^2)'y^2$

$=4x^3y+2xy^2$

$z_y=(x^4y+x^2y^2-y^3)_y$

$=x^4(y)'+x^2(y^2)'-(y^3)'$

$=x^4+2x^2y-3y^2$

$dz=z_xdx+z_ydy$ に代入して

$dz=(4x^3y+2xy^2)dx+(x^4+2x^2y-3y^2)dy$

(3) $z_x=\{(x^2+xy)(xy-y^2)\}_x$

$=(x^2+xy)_x(xy-y^2)+(x^2+xy)(xy-y^2)_x$

$=(2x+y)(xy-y^2)+y(x^2+xy)=3x^2y-y^3$

$z_y=\{(x^2+xy)(xy-y^2)\}_y$

$=(x^2+xy)_y(xy-y^2)+(x^2+xy)(xy-y^2)_y$

$=x(xy-y^2)+(x^2+xy)(x-2y)=x^3-3xy^2$

$dz=z_xdx+z_ydy$ に代入して

$dz=(3x^2y-y^3)dx+(x^3-3xy^2)dy$

(4) $z_x=\dfrac{1}{2}(2x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x^2-y^2)_x$

$=\dfrac{4x}{2\sqrt{2x^2-y^2}}=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2-y^2}}$

$z_y=\dfrac{1}{2}(2x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x^2-y^2)_y$

$=\dfrac{-2y}{2\sqrt{2x^2-y^2}}=-\dfrac{y}{\sqrt{2x^2-y^2}}$

$dz=z_xdx+z_ydy$ に代入して

$dz=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2-y^2}}dx-\dfrac{y}{\sqrt{2x^2-y^2}}dy$

(5) $z_x=(e^{2x}\cos y)_x=(e^{2x})'\cos y=e^{2x}(2x)'\cos y$

$=2e^{2x}\cos y$

$z_y=(e^{2x}\cos y)_y=e^{2x}(\cos y)'=-e^{2x}\sin y$

$dz=z_xdx+z_ydy$ に代入して

$dz=2e^{2x}\cos y dx-e^{2x}\sin y dy$

(6) $z_x=\{(x+y)\sin y\}_x$

$=(x+y)_x\sin y+(x+y)(\sin y)_x=\sin y$

$z_y=\{(x+y)\sin y\}_y$

$=(x+y)_y\sin y+(x+y)(\sin y)_y$

$=\sin y+(x+y)\cos y$

$dz=z_xdx+z_ydy$ に代入して

$dz=\sin y dx+\{\sin y+(x+y)\cos y\}dy$

2. (1) $z_x=(x^3-xy+2y^2)_x=3x^2-y$

$z_y=(x^3-xy+2y^2)_y=-x+4y$

$x=2, y=1$ のとき $z_x=11=f_x(2,1)$,

$z_y=2=f_y(2,1)$, また $z=8=f(2,1)$

$z-f(2,1)=f_x(2,1)(x-2)+f_y(2,1)(y-1)$

に代入して $z-8=11(x-2)+2(y-1)$ より

$-11x-2y+z=-16$

すなわち $11x+2y-z=16$

(2) $z_x=\{\cos(x-3y)\}(x-3y)_x=\cos(x-3y)$

$z_y=\{\cos(x-2y)\}(x-3y)_y=-3\cos(x-3y)$

$x=3, y=1$ のとき $z_x=1=f_x(3,1)$

$z_y=-3=f_y(3,1)$, また $z=0=f(3,1)$

$z-f(3,1)=f_x(3,1)(x-3)+f_y(3,1)(y-1)$

に代入して $z-0=(x-3)-3(y-1)$ より

$-x+3y+z=0$

すなわち $x-3y-z=0$

(3) $z_x=(3x^3+x^2y+y^3)_x=9x^2+2xy$

$z_y=(3x^3+x^2y+y^3)_y=x^2+3y^2$

$x=1, y=-1$ のとき $z_x=7=f_x(1,-1)$

$z_y=4=f_y(1,-1)$, また $z=1=f(1,-1)$

$z-f(1,-1)$

$=f_x(1,-1)(x-1)+f_y(1,-1)\{y-(-1)\}$

に代入して $z-1=7(x-1)+4(y+1)$ より

$-7x-4y+z=-2$

すなわち $7x+4y-z=2$