第2章 2 「全微分」 第1回

解答

1. (1) $dz=(6x^2y-6xy^4)dx+(2x^3-12x^2y^3)dy$

(2) $dz=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2y}}dx-\dfrac{1}{\sqrt{x-2y}}dy$

(3) $dz=2\cos(2x+y)dx+\cos(2x+y)dy$

(4) $dz=\dfrac{2x}{x^2+y}dx+\dfrac{1}{x^2+y}dy$

2. (1) $3x-y-z=1$　(2) $5x+5y+z=1$

(3) $4x-2y-z=3$

解説

1. (1) $z_x=(2x^3y-3x^2y^4)_x=2(x^3)'y-3(x^2)'y^4$

$=6x^2y-6xy^4$

$z_y=(2x^3y-3x^2y^4)_y=2x^3(y)'-3x^2(y^4)'$

$=2x^3-12x^2y^3$

$dz=z_xdx+z_ydy$ に代入して

$dz=(6x^2y-6xy^4)dx+(2x^3-12x^2y^3)dy$

(2) $z_x=\dfrac{1}{2}(x-2y)^{-\frac{1}{2}}(x-2y)_x=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2y}}$

$z_y=\dfrac{1}{2}(x-2y)^{-\frac{1}{2}}(x-2y)_y=\dfrac{-2}{2\sqrt{x-2y}}$

$=-\dfrac{1}{\sqrt{x-2y}}$

$dz=z_xdx+z_ydy$ に代入して

$dz=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2y}}dx-\dfrac{1}{\sqrt{x-2y}}dy$

(3) $z_x=\{\cos(2x+y)\}(2x+y)_x=2\cos(2x+y)$

$z_y=\{\cos(2x+y)\}(2x+y)_y=\cos(2x+y)$

$dz=z_xdx+z_ydy$ に代入して

$dz=2\cos(2x+y)dx+\cos(2x+y)dy$

(4) $z_x=\dfrac{(x^2+y)_x}{x^2+y}=\dfrac{2x}{x^2+y}$

$z_y=\dfrac{(x^2+y)_y}{x^2+y}=\dfrac{1}{x^2+y}$

$dz=z_xdx+z_ydy$ に代入して

$dz=\dfrac{2x}{x^2+y}dx+\dfrac{1}{x^2+y}dy$

2. (1) $z_x=(x^2+xy-y^2)_x=2x+y$

$z_y=(x^2+xy-y^2)_y=x-2y$

$x=1,y=1$ のとき $z_x=3=f_x(1,1)$

$z_y=-1=f_y(1,1)$, また $z=1=f(1,1)$

$z-f(1,1)=f_x(1,1)(x-1)+f_y(1,1)(y-1)$

に代入して $z-1=3(x-1)-(y-1)$ より

$-3x+y+z=-1$

すなわち $3x-y-z=1$

(2) $z_x=(-x^3+x^2y+3y^2)_x=-3x^2+2xy$

$z_y=(-x^3+x^2y+3y^2)_y=x^2+6y$

$x=1,y=-1$ のとき $z_x=-5=f_x(1,-1)$,

$z_y=-5=f_y(1,-1)$, また $z=1=f(1,-1)$

$z-f(1,-1)$

$=f_x(1,-1)(x-1)+f_y(1,-1)\{y-(-1)\}$

に代入して $z-1=-5(x-1)-5\{y-(-1)\}$

より $5x+5y+z=1$

(3) $z_x=(x^2-y^2)_x=2x$

$z_y=(x^2-y^2)_y=-2y$

$x=2,y=1$ のとき $z_x=4=f_x(2,1)$

$z_y=-2=f_y(2,1)$, また $z=3=f(2,1)$

$z-f(2,1)=f_x(2,1)(x-2)+f_y(2,1)(y-1)$

に代入して $z-3=4(x-2)-2(y-1)$ より

$-4x+2y+z=-3$

すなわち $4x-2y-z=3$