第２章 １ 「偏導関数」 第１回

解答

1. (1) $f'(x) = 2ax + 3a^2$　(2) $f'(y) = -2a + 2y$

(3) $f'(x) = -\dfrac{b}{x^2}$　(4) $f'(y) = \dfrac{b}{2\sqrt{y}} + b^2$

2. (1) $f_x = 6x^2y - 3y^2, f_y = 2x^3 - 6xy$

(2) $f_x = 3x^2 - 2xy + y^2, f_y = -x^2 + 2xy - 3y^3$

(3) $f_x = \dfrac{2y}{(x+y)^2}, f_y = -\dfrac{2x}{(x+y)^2}$

(4) $f_x = e^x \sin y, f_y = e^x \cos y$

3. (1) $f_x(1,1) = -3, f_y(1,1) = 1$

(2) $f_x(1,1) = -\dfrac{1}{2}, f_y(1,1) = -\dfrac{5}{2}$

解説

1. (1) $f'(x) = a(x^2)' + 3a^2(x)' - (a^3)' = 2ax + 3a^2$

(2) $f'(x) = (a^2)' - 2a(y)' + (y^2)' = -2a + 2y$

(3) $f(x) = bx^{-1}$ より $f'(x) = -bx^{-2} = -\dfrac{b}{x^2}$

(4) $f(y) = by^{\frac{1}{2}} + b^2y$ より

$f'(y) = \dfrac{1}{2}by^{-\frac{1}{2}} + b^2 = \dfrac{b}{2\sqrt{y}} + b^2$

2. (1) $f_x = (2x^3y - 3xy^2)_x$，y, y^2 は定数だから

$f_x = 2y(x^3)' - 3y^2(x)' = 6x^2y - 3y^2$

$f_y = (2x^3y - 3xy^2)_y$，x^3, x は定数だから

$f_y = 2x^3(y)' - 3x(y^2)' = 2x^3 - 6xy$

(2) $f_x = \{(x^2+y^2)(x-y)\}_x$

$= (x^2+y^2)_x(x-y) + (x^2+y^2)(x-y)_x$

y^2, y は定数だから

$f_x = 2x(x-y) + (x^2+y^2)$

$= 3x^2 - 2xy + y^2$

$f_y = \{(x^2+y^2)(x-y)\}_y$

$= (x^2+y^2)_y(x-y) + (x^2+y^2)(x-y)_y$

x^2, x は定数だから

$f_y = 2y(x-y) - (x^2+y^2) = -x^2 + 2xy - 3y^3$

(3) $f_x = \dfrac{(x-y)_x(x+y) - (x-y)(x+y)_x}{(x+y)^2}$

y は定数だから

$f_x = \dfrac{(x+y) - (x-y)}{(x+y)^2} = \dfrac{2y}{(x+y)^2}$

$f_y = \dfrac{(x-y)_y(x+y) - (x-y)(x+y)_y}{(x+y)^2}$

x は定数だから

$f_y = \dfrac{-(x+y) - (x-y)}{(x+y)^2} = -\dfrac{2x}{(x+y)^2}$

(4) $f_x = (e^x \sin y)_x$，$\sin y$ は定数だから

$f_x = (e^x)' \sin y = e^x \sin y$

$f_y = (e^x \sin y)_y$，e^x は定数だから

$f_y = e^x (\sin y)' = e^x \cos y$

3. (1) $f_x = (-x^2y^2 + 2xy^3 - 3xy)_x$

y^2, y^3, y は定数だから

$f_x = -(x^2)'y^2 + 2(x)'y^3 - 3(x)'y$

$= -2xy^2 + 2y^3 - 3y$

$f_y = (-x^2y^2 + 2xy^3 - 3xy)_y$

x^2, x は定数だから

$f_y = -x^2(y^2)' + 2x(y^3)' - 3x(y)'$

$= -2x^2y + 6xy^2 - 3x$

$(x, y) = (1, 1)$ を代入して

$f_x(1,1) = -2 + 2 - 3 = -3$

$f_y(1,1) = -2 + 6 - 3 = 1$

(2) $f_x = (\sqrt{xy} - xy^3)_x$，$\sqrt{y}, y^3$ は定数だから

$f_x = (\sqrt{x})'\sqrt{y} - (x)'y^3 = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\sqrt{y} - y^3$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{y}{x}} - y^3$

$f_y = (\sqrt{xy} - xy^3)_y$，$\sqrt{x}, x$ は定数だから

$f_y = \sqrt{x}(\sqrt{y})' - x(y^3)' = \sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} - 3xy^2$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{y}} - 3xy^2$

$(x, y) = (1, 1)$ を代入して

$f_x(1,1) = \dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{1}{2}$

$f_y(1,1) = \dfrac{1}{2} - 3 = -\dfrac{5}{2}$