第１章 4 「オイラーの公式」 第１回

解答

1. 実部 1，虚部 0

2. 実部 $-\dfrac{1}{2}$，虚部 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3. (1) $(2-i)e^{(2-i)x}$　　(2) $-2ie^{-2ix}$

解説

1. $\alpha = \dfrac{-1+i}{\sqrt{2}} = \cos\theta + i\sin\theta$ とおく．
$\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ は
$\theta = \dfrac{3}{4}\pi$ であり $\alpha^8 = \left(\cos\dfrac{3}{4}\pi + i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)^8$
ド・モアブルの公式を用いると
$\alpha^8 = \left(\cos\dfrac{3}{4}\pi + i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)^8 = \cos 6\pi + i\sin 6\pi$
$= 1 + 0i$
よって，α^8 の実部は 1，虚部は 0 である．

2. $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2} = \cos\theta + i\sin\theta$ とおく．
$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$，$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ は
$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ であり $\alpha^{10} = \left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^{10}$
ド・モアブルの公式を用いると
$\alpha^{10} = \left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^{10} = \cos\dfrac{10}{3}\pi + i\sin\dfrac{10}{3}\pi$
$= -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$
よって，α^{10} の実部は $-\dfrac{1}{2}$，虚部は $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である．

3. (1) $\alpha = 2-i$ (2) $\alpha = -2i$ として，$(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$
を用いる．