第１章 3 「多項式による近似」「べき級数とマクローリン展開」 第２回

解答

1. (1) 1 次近似式 $\sin 2x = 2x + \varepsilon_1$

2 次近似式 $\sin 2x = 2x + \varepsilon_2$

(2) 1 次近似式 $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + \varepsilon_1$

2 次近似式 $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \varepsilon_2$

2. (1) $e^{2x} = e^2 + 2e^2(x-1) + 2e^2(x-1)^2 + \varepsilon_2$

(2) $\sqrt[5]{x} = 1 + \dfrac{1}{5}(x-1) - \dfrac{2}{25}(x-1)^2 + \varepsilon_2$

3. (1) $e^{-x} = 1 - \dfrac{1}{1!}x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \cdots \dfrac{(-1)^n}{n!}x^n + \cdots$

(2) $\sin\dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{3!\cdot 2^3}x^3 + \dfrac{1}{5!\cdot 2^5}x^5 - \cdots$

$+\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!\cdot 2^{2n+1}}x^{2n+1} + \cdots$

(3) $\cos 2x = 1 - \dfrac{2^2}{2!}x^2 + \dfrac{2^4}{4!}x^4 - \cdots$

$+\dfrac{(-1)^n\cdot 2^{2n}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$

(4) $\dfrac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 2^2x^2 + \cdots + 2^n x^n + \cdots$

解説

1. (1) $f(x) = \sin 2x,\ f(0) = \sin 0 = 0,$

$f'(x) = 2\cos 2x,\ f'(0) = 2\cos 0 = 2$

$f''(x) = -4\sin 2x,\ f''(0) = 0$ を

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \varepsilon_1,$

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \varepsilon_2$

に代入する．

(2) $f(x) = (1+x)^{-1},\ f(0) = 1$

$f'(x) = -(1+x)^{-2},\ f'(0) = -1$

$f''(x) = 2(1+x)^{-3},\ f''(0) = 2$ を

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \varepsilon_1,$

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \varepsilon_2$

に代入する．

2. (1) $f(x) = e^{2x},\ f(1) = e^2,$

$f'(x) = 2e^{2x},\ f'(1) = 2e^2$

$f''(x) = 4e^{2x},\ f''(1) = 4e^2$ を

$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \dfrac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \varepsilon_2$

に代入する．

(2) $f(x) = x^{\frac{1}{5}},\ f(1) = 1,$

$f'(x) = \dfrac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}},\ f'(1) = \dfrac{1}{5}$

$f''(x) = -\dfrac{4}{25}x^{-\frac{9}{5}},\ f''(1) = -\dfrac{4}{25}$ を

$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \dfrac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \varepsilon_2$

に代入する．

3. (1) 教科書 p21 (6) に $-x$ を代入する

(2) 教科書 p21 (7) に $\dfrac{x}{2}$ を代入する

(3) 教科書 p21 (8) に $2x$ を代入する

(4) 教科書 p21 (9) に $2x$ を代入する