第１章 1 「数列の極限」 第３回

解答

1. (1) 0　(2) ∞
(3) 3　(4) ∞
(5) 0　(6) 1

2. (1) ∞ に発散　(2) 0 に収束
(3) 0 に収束　(4) 0 に収束

解説

1. (1)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{2n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n-1)\cdot\frac{1}{n^2}}{(2n^2+n+1)\cdot\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=0$$

(2)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+5}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-n+5)\cdot\frac{1}{n}}{(n+3)\cdot\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1+\frac{5}{n}}{1+\frac{3}{n}}=\infty$$

(3)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n+1}{n^2-2n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n^2+2n+1)\cdot\frac{1}{n^2}}{(n^2-2n+4)\cdot\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}}=3$$

(4)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+4}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n+4)\cdot\frac{1}{n}}{(3n-1)\cdot\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2+\frac{4}{n}}{3-\frac{1}{n}}=\infty$$

(5)
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}=0$$

(6)
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n+4}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n+4}-n)(\sqrt{n^2+2n+4}+n)}{\sqrt{n^2+2n+4}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{\sqrt{n^2+2n+4}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+4)\cdot\frac{1}{n}}{(\sqrt{n^2+2n+4}+n)\cdot\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{4}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}}+1}=1$$

2. 教科書 p.12 にあるように等比数列 $\{r^n\}$ の極限は，公比 r によって，収束・発散が決まる．

(1) 公比 $r=\frac{4}{3}$ より ∞ に発散する

(2) 公比 $r=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ より 0 に収束する

(3) 公比 $r=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ より 0 に収束する

(4) 公比 $r=\frac{1}{1-\sqrt{5}}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ より，
$-1<r<1$ だから 0 に収束する