第１章 1 「数列の極限」 第２回

解答

1. (1) 0　(2) $\dfrac{1}{2}$

(3) ∞　(4) ∞

(5) 0　(6) $\dfrac{1}{2}$

2. (1) ∞ に発散　(2) 0 に収束

(3) 1 に収束　(4) 発散 (振動する)

解説

1. (1)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot\frac{1}{n^2}}{(n^2+n-1)\cdot\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} = 0$$

(2)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n-3} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot\frac{1}{n}}{(2n-3)\cdot\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{2-\frac{3}{n}} = \frac{1}{2}$$

(3)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+1}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n^2-n+1)\cdot\frac{1}{n}}{(n+1)\cdot\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n-1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \infty$$

(4)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-n^2+2n+1}{n+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n^3-n^2+2n+1)\cdot\frac{1}{n^3}}{(n+3)\cdot\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^3}} = \infty$$

(5)
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = 0$$

(6)
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n-1}-n) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n-1}-n)(\sqrt{n^2+n-1}+n)}{\sqrt{n^2+n-1}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{\sqrt{n^2+n-1}+n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)\cdot\frac{1}{n}}{(\sqrt{n^2+n-1}+n)\cdot\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2}$$

2. 教科書 p.12 にあるように等比数列 $\{r^n\}$ の極限は，公比 r によって，収束・発散が決まる．

(1) 公比 $r=\dfrac{5}{4}$ より ∞ に発散する

(2) 公比 $r=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$ より 0 に収束する

(3) 公比 $r=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$ より 1 に収束する

(4) 公比 $r=\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}=-\sqrt{3}-2<-1$ より発散 (振動) する