第１章 1 「数列の極限」 第１回

解答

1. (1) ∞　　(2) $\dfrac{4}{3}$

(3) 0　　(4) $\dfrac{3}{2}$

2. (1) 0 に収束　　(2) 0 に収束

(3) ∞ に発散　　(4) 発散 (振動する)

解説

1. (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n+1}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n+1)\cdot\frac{1}{n}}{(n+1)\cdot\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \infty$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{3n-2}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(4n+1)\cdot\frac{1}{n}}{(3n-2)\cdot\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}} = \frac{4}{3}$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n+1}-n)$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+3n+1}-n)(\sqrt{n^2+3n+1}+n)}{\sqrt{n^2+3n+1}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{n^2+3n+1}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)\cdot\frac{1}{n}}{(\sqrt{n^2+3n+1}+n)\cdot\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{3}{2}$$

2. 教科書 p.12 にあるように等比数列 $\{r^n\}$ の極限は,
公比 r によって，収束・発散が決まる．

(1) 公比 $r = \dfrac{2}{3}$ より 0 に収束する

(2) 公比 $r = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より 0 に収束する

(3) 公比 $r = \tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ より ∞ に発散する

(4) 公比 $r = \dfrac{1}{1-\sqrt{2}} = -1-\sqrt{2} < -1$ より発散
(振動) する