

第4章 1 「図形の面積」 第1回

解答

1. (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{125}{6}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{1}{4}$
 2. (1) $\frac{8}{3}$ (2) $\frac{71}{6}$ (3) $\frac{253}{12}$

解説

1. (1) 曲線と直線の共有点の x 座標は $y = x^2$,

$$y = 3x - 2 \text{ より } x^2 = 3x - 2 \text{ すなわち}$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) = 0, \quad x = 1, 2$$

$$1 \leq x \leq 2 \text{ のとき } x^2 \leq 3x - 2 \text{ より}$$

$$S = \int_1^2 \{(3x - 2) - x^2\} dx = \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) dx$$

$$\begin{aligned} &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x \right]_1^2 \\ &= -\frac{8}{3} + 6 - 4 - \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2 \right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

- (2) 曲線と直線の共有点の x 座標は $y = -x^2$,

$$y = x - 6 \text{ より } -x^2 = x - 6 \text{ すなわち}$$

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3) = 0, \quad x = 2, -3$$

$$-3 \leq x \leq 2 \text{ のとき } -x^2 \geq x - 6 \text{ より}$$

$$S = \int_{-3}^2 \{-x^2 - (x - 6)\} dx = \int_{-3}^2 (-x^2 - x + 6) dx$$

$$\begin{aligned} &= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-3}^2 \\ &= -\frac{8}{3} - 2 + 12 - \left(9 - \frac{9}{2} - 18 \right) = \frac{125}{6} \end{aligned}$$

- (3) 曲線と直線の共有点の x 座標は $y = x^3, y = x$

$$\text{より } x^3 = x \text{ すなわち}$$

$$x^3 - x = x(x - 1)(x + 1) = 0, \quad x = 0, \pm 1$$

$$\text{右側 } 0 \leq x \leq 1 \text{ のとき } x^3 \leq x \text{ より}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (x - x^3) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- (4) 左側 $-1 \leq x \leq 0$ のとき $x^3 \geq x$ より

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 \\ &= 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

2. (1) 曲線と x 軸の共有点の x 座標は $y = x^2 - 2x$,

$$y = 0(x \text{ 軸}) \text{ より } x^2 - 2x = x(x - 2) = 0$$

$$\text{すなわち } x = 2, 0$$

$$-1 \leq x \leq 0 \text{ のとき } x^2 - 2x \geq 0,$$

$$0 \leq x \leq 2 \text{ のとき } x^2 - 2x \leq 0 \text{ より}$$

$$S = \int_{-1}^0 (x^2 - 2x - 0) dx + \int_0^2 \{0 - (x^2 - 2x)\} dx$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) - \frac{8}{3} + 4 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

- (2) 2 曲線の共有点の x 座標は $y = x^3 - x^2 - 3x$,

$$y = x^2 \text{ より } x^3 - x^2 - 3x = x^2 \text{ すなわち}$$

$$x^3 - 2x^2 - 3x = x(x - 3)(x + 1) = 0,$$

$$x = 0, 3, -1$$

$$-1 \leq x \leq 0 \text{ のとき } x^3 - x^2 - 3x \geq x^2,$$

$$0 \leq x \leq 3 \text{ のとき } x^3 - x^2 - 3x \leq x^2 \text{ より}$$

$$S = \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 3x - x^2) dx$$

$$+ \int_0^3 \{x^2 - (x^3 - x^2 - 3x)\} dx$$

$$= \int_{-1}^0 (x^3 - 2x^2 - 3x) dx + \int_0^3 (-x^3 + 2x^2 + 3x) dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^3$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{2} \right) - \frac{81}{4} + \frac{54}{3} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{71}{6}$$

- (3) 2 曲線の共有点の x 座標は $y = x^3 - 6x$,

$$y = x^2 \text{ より } x^3 - 6x = x^2 \text{ すなわち}$$

$$x^3 - x^2 - 6x = x(x - 3)(x + 2) = 0,$$

$$x = 0, 3, -2$$

$$-2 \leq x \leq 0 \text{ のとき } x^3 - 6x \geq x^2,$$

$$0 \leq x \leq 3 \text{ のとき } x^3 - 6x \leq x^2 \text{ より}$$

$$S = \int_{-2}^0 (x^3 - 6x - x^2) dx + \int_0^3 \{x^2 - (x^3 - 6x)\} dx$$

$$= \int_{-2}^0 (x^3 - x^2 - 6x) dx + \int_0^3 (-x^3 + x^2 + 6x) dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^3$$

$$= 0 - \left(4 + \frac{8}{3} - 12 \right) - \frac{81}{4} + \frac{27}{3} + 27 = \frac{253}{12}$$