第１章 7 「逆三角関数とその導関数」 第１回

解答

1. (1) $y=\dfrac{\pi}{2}$　(2) $y=\dfrac{\pi}{4}$
(3) $y=-\dfrac{\pi}{4}$

2. (1) $y=\dfrac{\pi}{3}$　(2) $y=\dfrac{\pi}{6}$
(3) $y=\pi$

3. (1) $y=\dfrac{\pi}{6}$　(2) $y=\dfrac{\pi}{3}$
(3) $y=-\dfrac{\pi}{4}$

4. (1) $y'=\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$　(2) $y'=-\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$
(3) $y'=\dfrac{2}{1+4x^2}$

解説

1. 関係式 $y=\sin^{-1}x \quad \Leftrightarrow \quad \sin y=x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq y\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$
を用いる.

(1) $y=\sin^{-1}1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin y=1$
より $y=\dfrac{\pi}{2}$

(2) $y=\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \sin y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
より $y=\dfrac{\pi}{4}$

(3) $y=\sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \sin y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
より $y=-\dfrac{\pi}{4}$

2. 関係式 $y=\cos^{-1}x \quad \Leftrightarrow \quad \cos y=x \quad (0\leqq y\leqq\pi)$
を用いる.

(1) $y=\cos^{-1}\dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos y=\dfrac{1}{2}$
より $y=\dfrac{\pi}{3}$

(2) $y=\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
より $y=\dfrac{\pi}{6}$

(3) $y=\cos^{-1}(-1) \quad \Leftrightarrow \quad \cos y=-1$
より $y=\pi$

3. 関係式 $y=\tan^{-1}x \quad \Leftrightarrow \quad \tan y=x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$
を用いる.

(1) $y=\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad \tan y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
より $y=\dfrac{\pi}{6}$

(2) $y=\tan^{-1}\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \tan y=\sqrt{3}$
より $y=\dfrac{\pi}{3}$

(3) $y=\tan^{-1}(-1) \quad \Leftrightarrow \quad \tan y=-1$
より $y=-\dfrac{\pi}{4}$

4. 次のように u を置いて，逆三角関数の微分

$$\left(\sin^{-1}x\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\left(\cos^{-1}x\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\left(\tan^{-1}x\right)'=\frac{1}{1+x^2}$$

を用いて $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}\dfrac{dy}{du}$ を計算すればよい.

(1) $y=\sin^{-1}u,\quad u=3x$

$\dfrac{dy}{du}=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}},\quad \dfrac{du}{dx}=3$ より

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{3}{\sqrt{1-u^2}}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}=\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$$

(2) $y=\cos^{-1}u,\quad u=2x$

$\dfrac{dy}{du}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}},\quad \dfrac{du}{dx}=2$ より

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=-\frac{2}{\sqrt{1-u^2}}$$
$$=-\frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}=-\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

(3) $y=\tan^{-1}u,\quad u=2x$

$\dfrac{dy}{du}=\dfrac{1}{1+u^2},\quad \dfrac{du}{dx}=2$ より

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{2}{1+u^2}$$
$$=\frac{2}{1+(2x)^2}=\frac{2}{1+4x^2}$$