第１章 5 「合成関数の導関数」 第3回

解答

1. (1) $y=\sqrt{u},\quad u=x^2+x+1$

(2) $y=e^u,\quad u=\sin x$

2. (1) $y'=30(6x+7)^4$ (2) $y'=16x(2x^2-1)^3$

(3) $y'=6(x^2+x+1)^5(2x+1)$

(4) $y'=9x^2(x^3+1)^2$

(5) $y'=-2xe^{-x^2}$ (6) $y'=e^{-\cos x}\sin x$

(7) $y'=\dfrac{2x}{x^2+2}$ (8) $y'=\dfrac{2x-1}{x^2-x-1}$

(9) $y'=\dfrac{1}{\tan x}$

(10) $y'=\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-1}}$

(11) $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{(x^2-4)^3}}$

(12) $y'=-2x\sin(x^2-1)$

(13) $y'=-2\cos x\sin x$ (14) $y'=4\sin^3 x\cos x$

解説

1. (1) $y=\sqrt{x^2+x+1}$ において

$u=x^2+x+1$ とおくと $y=\sqrt{u}$ となる.

(2) $y=e^{\sin x}$ において

$u=\sin x$ とおくと $y=e^u$ となる.

2. (1) $y=u^5,\quad u=6x+7$

$\dfrac{dy}{du}=5u^4,\quad \dfrac{du}{dx}=6$ より

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}=5u^4\cdot 6=30(6x+7)^4$

(2) $y=u^4,\quad u=2x^2-1$

$\dfrac{dy}{du}=4u^3,\quad \dfrac{du}{dx}=4x$ より

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$

$=4u^3\cdot(4x)=16x(2x^2-1)^3$

(3) $y=u^6,\quad u=x^2+x+1$

$\dfrac{dy}{du}=6u^5,\quad \dfrac{du}{dx}=2x+1$ より

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$

$=6u^5\cdot(2x+1)=6(x^2+x+1)^5(2x+1)$

(4) $y=u^3,\quad u=x^3+1$

$\dfrac{dy}{du}=3u^2,\quad \dfrac{du}{dx}=3x^2$ より

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$

$=3u^2\cdot(3x^2)=9x^2(x^3+1)^2$

(5) $y=e^u,\quad u=-x^2$

$\dfrac{dy}{du}=e^u,\quad \dfrac{du}{dx}=-2x$ より

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}=e^u\cdot(-2x)=-2xe^{-x^2}$

(6) $y=e^u,\quad u=-\cos x$

$\dfrac{dy}{du}=e^u,\quad \dfrac{du}{dx}=\sin x$ より

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}=e^u\sin x=e^{-\cos x}\sin x$

(7) $y=\log u,\quad u=x^2+2$

$\dfrac{dy}{du}=\dfrac{1}{u},\quad \dfrac{du}{dx}=2x$ より

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{u}\cdot(2x)=\dfrac{2x}{x^2+2}$

(8) $y=\log|u|,\quad u=x^2-x-1$

$\dfrac{dy}{du}=\dfrac{1}{u},\quad \dfrac{du}{dx}=2x-1$ より

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{u}\cdot(2x-1)=\dfrac{2x-1}{x^2-x-1}$

(9) $y=\log|u|,\quad u=\sin x$

$\dfrac{dy}{du}=\dfrac{1}{u},\quad \dfrac{du}{dx}=\cos x$ より

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$

$=\dfrac{1}{u}\cdot\cos x=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{1}{\tan x}$

(10) $y=\sqrt{u},\quad u=x^2-x-1$

$\dfrac{dy}{du}=\dfrac{1}{2\sqrt{u}},\quad \dfrac{du}{dx}=2x-1$ より

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(2x-1)=\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-1}}$

(11) $y=\dfrac{1}{\sqrt{u}},\quad u=x^2-4$

$\dfrac{dy}{du}=-\dfrac{1}{2\sqrt{u^3}},\quad \dfrac{du}{dx}=2x$ より

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$

$=-\dfrac{1}{2\sqrt{u^3}}\cdot(2x)=-\dfrac{x}{\sqrt{(x^2-4)^3}}$

(12) $y=\cos u,\quad u=x^2-1$

$\dfrac{dy}{du}=-\sin u,\quad \dfrac{du}{dx}=2x$ より

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$

$=-\sin u\cdot(2x)=-2x\sin(x^2-1)$

(13) $y=u^2,\quad u=\cos x$

$\dfrac{dy}{du}=2u,\quad \dfrac{du}{dx}=-\sin x$ より

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$

$=2u\cdot(-\sin x)=-2\cos x\sin x$

(14) $y=u^4,\quad u=\sin x$

$\dfrac{dy}{du}=4u^3,\quad \dfrac{du}{dx}=\cos x$ より

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$

$=4u^3\cdot\cos x=4\sin^3 x\cos x$