第3章 2 「二項分布」「ポアソン分布」 第3回

解答

1. (1) $B\left(4,\,\dfrac{1}{3}\right)$

(2) i) $\dfrac{24}{81}$, ii) $\dfrac{8}{81}$, iii) $\dfrac{1}{81}$

2. (1) 平均 $\dfrac{4}{3}$ ， 分散 $\dfrac{8}{9}$

(2) 平均 $\dfrac{100}{3}$ ， 分散 $\dfrac{100}{9}$

(3) 平均 5 ， 分散 $\dfrac{999}{200}$

3. $P(X=40)={}_{60}\mathrm{C}_{40}\left(\dfrac{3}{10}\right)^{40}\left(\dfrac{7}{10}\right)^{20}$

$E[X]=18$，$V[X]=\dfrac{63}{5}$

4. 0.323

5. 0.191

解説

1. (1) 二項分布 $B\left(4,\,\dfrac{1}{3}\right)$ に従う．

(2) i) $P(X=2)={}_4\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{24}{81}$

ii) $P(X=3)={}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^1=\dfrac{8}{81}$

iii) $P(X=4)={}_4\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\left(\dfrac{2}{3}\right)^0=\dfrac{1}{81}$

2. (1) 平均 $E[X]=np=4\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}$

分散 $V[X]=npq=4\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{9}$

(2) 平均 $E[X]=np=50\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{100}{3}$

分散 $V[X]=npq=50\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{100}{9}$

(3) 平均 $E[X]=np=5000\times\dfrac{1}{1000}=5$

分散 $V[X]=npq=5000\times\dfrac{1}{1000}\times\dfrac{999}{1000}$
$=\dfrac{999}{200}$

3. 確率変数 X は，二項分布 $B\left(60\,,\,\dfrac{3}{10}\right)$ に従う．

$P(X=40)={}_{60}\mathrm{C}_{40}\left(\dfrac{3}{10}\right)^{40}\left(\dfrac{7}{10}\right)^{20}$

$E[X]=np=60\times\dfrac{3}{10}=18$

$V[X]=npq=60\times\dfrac{3}{10}\times\dfrac{7}{10}=\dfrac{63}{5}$

4. 台風の平均通過回数が 2 だから $\lambda=2$ となる．
よって，X はポアソン分布 $P_o(2)$ に従うから

$$P(X=k)=e^{-2}\frac{2^k}{k!}\quad(k=0,\,1,\,2,\,\ldots)$$

$$\begin{aligned}P(X\leqq 2)&=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\\&=e^{-2}\times\frac{2^0}{0!}+e^{-2}\times\frac{2^1}{1!}+e^{-2}\times\frac{2^2}{2!}\\&=\frac{1}{e^2}\times(1+2+2)\\&=\frac{5}{e^2}=0.67668\end{aligned}$$

もしくは，教科書 p.165 のポアソン分布表より

$$\begin{aligned}P(X\leqq 2)&=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\\&=0.13534+0.27067+0.27067\\&=0.67668\end{aligned}$$

したがって，この地方を台風が 3 回以上通過する確率は，全確率 1 から $P(X\leqq 2)$ を引くことで

$$\begin{aligned}P(X\geqq 3)&=1-P(X\leqq 2)=1-0.67668\\&=0.323\end{aligned}$$

5. 当たりくじは 1000 本に 3 本の割合で含まれることから $p=\dfrac{3}{1000}=0.003$
したがって，市販のくじ 500 本に含まれる当たりくじの数を X とすると，確率変数 X は二項分布 $B(500,0.003)$ に従う．
$n=500$ は大きく，$p=0.003$ は小さいことから，$\lambda=np=500\times0.003=1.5$ より $B(500,0.003)$ を $P_o(1.5)$ で近似する．

$$P(X=k)\risingdotseq e^{-1.5}\frac{1.5^k}{k!}\quad(k=0,\,1,\,2,\,\ldots)$$

$$\begin{aligned}P(X\leqq 2)&\risingdotseq P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\\&=e^{-1.5}\frac{1.5^0}{0!}+e^{-1.5}\frac{1.5^1}{1!}+e^{-1.5}\frac{1.5^2}{2!}\\&=\frac{1}{e^{1.5}}\left(1+1.5+\frac{1.5^2}{2}\right)=0.80885\end{aligned}$$

もしくは，教科書 p.165 のポアソン分布表より

$$\begin{aligned}P(X\leqq 2)&\risingdotseq P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\\&=0.22313+0.33470+0.25102\\&=0.80885\end{aligned}$$

したがって，当たりくじが 3 本以上含まれている確率は，全確率 1 から $P(X\leqq 2)$ を引くことで

$$\begin{aligned}P(X\geqq 3)&=1-P(X\leqq 2)=1-0.80885\\&=0.191\end{aligned}$$