日　付	学　科	学　年	番　　号	名　　前
／				

第 4 章 5 「行列の対角化」「対角化可能の条件」 第 1 回

例題 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ について，対角化行列を求め対角化せよ．

解 第 4 章 4「固有値と固有ベクトルの計算」第 1 回で行列 A の固有値 $\lambda = 2,\ -4$ およびそれらに対する固有ベクトル $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ $(c_1 \fallingdotseq 0,\ c_2 \fallingdotseq 0)$ を求めてある．$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ とおくことにより，A の対角化行列 P が求まり，A の対角化 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ を得る．

1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2) 対角化行列を求めて対角化せよ．

例題 行列 $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，対角化可能な場合は対角化せよ．

解 固有方程式 $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 = 0$ より，固有値は $\lambda = 2$ (2 重解) となる．固有値 2 に対する，固有ベクトルを求めると $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より，$x = y$ となる．よって，固有ベクトル $c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(c \fallingdotseq 0)$ を得る．固有ベクトルが 1 つしかないので，対角化行列が作れない．したがって，対角化可能でない．

2. 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ について，対角化可能な場合は対角化せよ．