日　付	学　科	学　年	番　　号	名　　前
／				

第 4 章 4 「固有値と固有ベクトルの計算」 第 1 回

1. 次の方程式の解を求めよ．

(1) $x^2+3x-18=0$　　(2) $x^2+6x+8=0$　　(3) $x^2-64=0$

例題 行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 5 & -3\end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 固有値を求めよ．　　(2) 固有ベクトルを求めよ．

解 (1) 固有方程式

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 5 & -3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(-3-\lambda)-5=\lambda^2+2\lambda-8=(\lambda-2)(\lambda+4)=0$$

を解いて，固有値 $\lambda=2,\ -4$ を得る．

(2) $\underline{\lambda=2 \text{ のとき}}$

$(A-2E)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2 & 1\\ 5 & -3-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 5 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ となり，関係式 $x=y$ を得る．$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\ y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ となるから，$c_1=y$ とおいて，固有値 2 に対する固有ベクトル $c_1\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ $(c_1\neq 0)$ を得る．

$\underline{\lambda=-4 \text{ のとき}}$

$\{A-(-4)E\}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-(-4) & 1\\ 5 & -3-(-4)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix}5 & 1\\ 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ となり，関係式 $y=-5x$ を得る．$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ -5x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\ -5\end{pmatrix}$ となるから，$c_2=x$ とおいて，固有値 -4 に対する固有ベクトル $c_2\begin{pmatrix}1\\ -5\end{pmatrix}$ $(c_2\neq 0)$ を得る．

2. 行列 $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 固有値を求めよ．　　(2) 固有ベクトルを求めよ．