日付	学科	学年	番号	名前

第3章 5 「行列式と逆行列」「連立1次方程式と行列式」 第2回

1. 行列式 $|A|$ から i 行と j 列を取り除いてできる行列式を $(i,\ j)$ 成分の小行列式といい D_{ij} と表す．次の行列式について，(1) は D_{11}，D_{23}，D_{31}，(2) は D_{12}，D_{22}，D_{32} を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$　　　(2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

例題 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ が正則かどうかを調べよ．正則ならば，余因子行列を用いて逆行列を求めよ．

解 行列式を計算すると，$|A| = -5 + 4 + 1 + 30 = 30 \fallingdotseq 0$ だから，正則である．A が正則であるとき，A の余因子行列 $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} D_{11} & -D_{21} & D_{31} \\ -D_{12} & D_{22} & -D_{32} \\ D_{13} & -D_{23} & D_{33} \end{pmatrix}$ を用いて，$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\widetilde{A}$ となる．いま，各 $(i,\ j)$ 成分の小行列式 D_{ij} を求めると

$$
\begin{aligned}
D_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -4, \quad D_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -17, \quad D_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5, \\
D_{21} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -10, \quad D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -5, \quad D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5, \\
D_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5
\end{aligned}
$$

よって，$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\widetilde{A} = \dfrac{1}{30}\begin{pmatrix} -4 & 10 & 2 \\ 17 & -5 & -1 \\ -5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$ を得る．

2. 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ が正則かどうかを調べよ．正則ならば，余因子行列を用いて逆行列を求めよ．

3. 連立1次方程式 $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3x - 5y - z = 2 \\ 4x - 3y + z = 1 \end{cases}$ をクラメルの公式を用いて解け．