

第4章 5 「行列の対角化」「対角化可能の条件」 第2回

解答

1. 与えられた行列を A とおく.

(1) 固有値は $\lambda = 3, 1, -1$, それぞれに対応する固有ベクトルは

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(c_1 \neq 0, c_2 \neq 0, c_3 \neq 0)$

(2) 対角化行列を $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおき,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. 可能でない

解説

1. (1) 固有方程式

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ -6 & 6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda+1) = 0$$

より, 固有値 $\lambda = 3, 1, -1$ を得る.

$\lambda = 3$ のとき

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より,

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \cdots \textcircled{1} \\ 3x - 3y + z = 0 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

① + ② として, $y = 2x$ がわかる. これを①へ代入して $z = 3x$ がわかる. 固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 3x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となるから, $x = c_1$ とおいて, 固有ベクトル

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (c_1 \neq 0) \text{ を得る.}$$

固有値 $\lambda = 1, -1$ の場合も同様にして, 固有ベクトル

$$c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c_2 \neq 0, c_3 \neq 0) \text{ を得る.}$$

(2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおいて,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. 固有方程式

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^3 = 0$$

より, 固有値 $\lambda = 4$ (3重解) を得る. 固有ベクトルを求めると,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より, $y = 0, z = 0$ を得る. したがって, 固有ベ

クトルは $c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($c \neq 0$) となる.

固有ベクトルは1つしか取れないので, 対角化可能でない.