第 4 章 5 「行列の対角化」「対角化可能の条件」 第 1 回

解答

1. (1) 固有値は $\lambda = 4,\ -1$, それぞれに対応する固有ベクトルは $c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(c_1 \fallingdotseq 0,\ c_2 \fallingdotseq 0)$

(2) 対角化行列 $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. 可能でない

解説

1. (1) 固有方程式

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda-4)(\lambda+1) = 0$$

より，固有値 $\lambda = 4,\ -1$ を得る．

$\underline{\lambda = 4 \text{ のとき}}$

$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ から $y = \dfrac{3}{2}x$ となる．よって，固有ベクトル $c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $(c_1 \fallingdotseq 0)$ を得る．

$\underline{\lambda = -1 \text{ のとき}}$

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ から $y = -x$ となる．よって，固有ベクトル $c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(c_2 \fallingdotseq 0)$ を得る．

(2) $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ とおいて，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

[**注意**] 教科書 145 ページの注にある通り，対角化行列を $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ とおくと，A の対角化は

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

となる．こちらも正解である．

2. 固有方程式

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2 = 0$$

より，固有値 $\lambda = 1$ (2 重解) を得る．固有ベクトルを求めると $c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(c \fallingdotseq 0)$ となる．よって，固有ベクトルが 1 つしかないので，対角化可能でない．