第4章 4 「固有値と固有ベクトルの計算」 第2回

解答

1. (1) $x=1,\ 2$ (2) $x=1,\ 2,\ 3$

2. 固有値・固有ベクトルは順に対応

(1) $\lambda=1,\ 3,\ 5$

(2) $c_1\begin{pmatrix}1\\7\\-5\end{pmatrix},\ c_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\ c_3\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$(c_1\fallingdotseq 0,\ c_2\fallingdotseq 0,\ c_3\fallingdotseq 0)$

解説

1. (1) 左辺 $=P(x)$ とおく．

$$P(1)=1-5+8-4=0$$

より，$P(x)$ は $x-1$ で割り切れる (因数定理).

$$\begin{array}{r|rrrr} & x^2 & -4x & +4 & \\ \hline x-1 & x^3 & -5x^2 & +8x & -4 \\ & x^3 & -x^2 & & \\ \hline & & -4x^2 & +8x & \\ & & -4x^2 & +4x & \\ \hline & & & 4x & -4 \\ & & & 4x & -4 \\ \hline & & & & 0 \end{array}$$

よって，$P(x)=(x-1)(x^2-4x+4)$

さらに因数分解して

$$P(x)=(x-1)(x-2)^2$$

よって，$P(x)=(x-1)(x-2)^2=0$ を解いて $x=1,\ 2$ (2 重解) を得る．

(2) 左辺 $=P(x)$ とおく．

$$P(1)=1-6+11-6=0$$

より，$P(x)$ は $x-1$ で割り切れる (因数定理).
(1) と同様に割り算を計算して

$$P(x)=(x-1)(x^2-5x+6)$$

となる．さらに因数分解して

$$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$$

よって，$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)=0$ を解いて $x=1,\ 2,\ 3$ を得る．

[**注意**] $P(a)=0$ となる a の値を探す場合，この問題のように $P(x)$ が整数係数の多項式であれば，定数項の約数がその候補となる事実を覚えておくとよい．(1) では，定数項は -4 であるから，その約数 $\pm1,\ \pm2,\ \pm4$ が $P(x)$ へ代入して 0 となる a の候補となる．

2. (1) 固有方程式

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}3-\lambda & -1 & -1\\ -2 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 2 & 4-\lambda\end{vmatrix}\\ =\ & (3-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda)-1+4\\ &\quad -2(3-\lambda)-2(4-\lambda)+(2-\lambda)\\ =\ & -(\lambda^3-9\lambda^2+23\lambda-15)=0\end{aligned}$$

より，$\lambda^3-9\lambda^2+23\lambda-15=0$ となる．左辺を $P(\lambda)$ とおくと $P(1)=0$ となるから，$P(\lambda)$ は $\lambda-1$ で割り切れる．割り算を計算して，

$P(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda^2-8\lambda+15)=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)$

よって，固有値 $\lambda=1,\ 3,\ 5$ を得る．

(2) $\underline{\lambda=1\text{ のとき}}$ $\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

から

$$\begin{cases}2x-\ y-\ z=0\cdots①\\ x+2y+3z=0\cdots②\end{cases}$$

$2\times①+②$ より $5x+z=0$，つまり $z=-5x$ となる．①へ代入して，$y=7x$ となる．よって，固有ベクトル $c_1\begin{pmatrix}1\\7\\-5\end{pmatrix}$ $(c_1\fallingdotseq 0)$ を得る．

$\underline{\lambda=3\text{ のとき}}$ $\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ -2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

から

$$\begin{cases}-y-z=0\cdots①\\ -2x-\ y+z=0\cdots②\\ x+2y+z=0\cdots③\end{cases}$$

① より，$y=-z$ となる．③へ代入して，$x=z$ となる．よって，固有ベクトル $c_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $(c_2\fallingdotseq 0)$ を得る．

$\underline{\lambda=5\text{ のとき}}$ $\begin{pmatrix}-2 & -1 & -1\\ -2 & -3 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

から

$$\begin{cases}-2x-\ y-z=0\cdots①\\ -2x-3y+z=0\cdots②\\ x+2y-z=0\cdots③\end{cases}$$

$②-①$ より $-2y+2z=0$，つまり $y=z$ となる．③へ代入して，$x=-z$ となる．よって，固有ベクトル $c_3\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ $(c_3\fallingdotseq 0)$ を得る．