第 4 章 3 「回転を表す線形変換」「直交行列と直交変換」 第 3 回

解答

1. (1) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (4) $\dfrac{1}{2}$

2.
(1) $T\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)=\begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ (2) $T\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $T\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

3. $(\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$

4. $A_1,\ A_2,\ A_4,\ A_5$

解説

1. $180^\circ=\pi$ (rad) に注意する．

(1) 与式 $=\sin 300^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (2) 与式 $=\cos 150^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) 与式 $=\cos 315^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (4) 与式 $=\sin 150^\circ=\dfrac{1}{2}$

2.
(1) $T\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)=\begin{pmatrix} \cos\dfrac{5}{6}\pi & -\sin\dfrac{5}{6}\pi \\ \sin\dfrac{5}{6}\pi & \cos\dfrac{5}{6}\pi \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

(2) $T\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{2} & -\sin\dfrac{\pi}{2} \\ \sin\dfrac{\pi}{2} & \cos\dfrac{\pi}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $T\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\begin{pmatrix} \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

3. 座標平面上の点を原点のまわりに π だけ回転させる線形変換を表す行列は $\begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ で与えられる．したがって，

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

より点 P' の座標は $(\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$ となる．

4. 第 1 回，第 2 回の例題のように，行列を構成している列を列ベクトルと見て，すべての列ベクトルの大きさが 1 かつ相異なる列ベクトルがすべて互いに直交している行列を探す．