第4章 3 「回転を表す線形変換」「直交行列と直交変換」 第2回

解答

1. (1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(2) 0　(3) $-\dfrac{1}{2}$　(4) -1

2.
(1) $T\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$　(2) $T\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$　(3) $T\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

3. $(2,\ 0)$

4. A_2

解説

1. $180^\circ = \pi$ (rad) に注意する.

(1) 与式 $= \sin 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(2) 与式 $= \cos 90^\circ = 0$

(3) 与式 $= \cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}$　(4) 与式 $= \sin 270^\circ = -1$

2.
(1) $T\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

(2) $T\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=\begin{pmatrix} \cos\dfrac{2}{3}\pi & -\sin\dfrac{2}{3}\pi \\ \sin\dfrac{2}{3}\pi & \cos\dfrac{2}{3}\pi \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$

(3) $T\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)=\begin{pmatrix} \cos\dfrac{3}{4}\pi & -\sin\dfrac{3}{4}\pi \\ \sin\dfrac{3}{4}\pi & \cos\dfrac{3}{4}\pi \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

3. 座標平面上の点を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させる線形変換を表す行列は $\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{4} & -\sin\dfrac{\pi}{4} \\ \sin\dfrac{\pi}{4} & \cos\dfrac{\pi}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ で与えられる．したがって，

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より点 P' の座標は $(2,\ 0)$ となる.

4. 例題のように，行列を構成している列を列ベクトルと見て，すべての列ベクトルの大きさが 1 かつ相異なる列ベクトルがすべて互いに直交している行列を探す.