第 4 章 2 「合成変換と逆変換」 第 1 回

解答

1. (1) $\begin{pmatrix} 17 & 11 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $(45,\ 1)$ (2) $\begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$, $(31,\ 22)$

2. (1) $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$

3. $\left(-\frac{5}{3},\ 2\right)$

4. 直線 $x+y=2$

解説

1.
(1) 合成変換 $f \circ g$ を表す行列は $AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 11 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ により与えられる．点 $(2,\ 1)$ の $f \circ g$ による像は $\begin{pmatrix} 17 & 11 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 1 \end{pmatrix}$ より，点 $(45,\ 1)$ となる．

(2) 合成変換 $g \circ f$ を表す行列は $BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$ により与えられる．点 $(2,\ 1)$ の $g \circ f$ による像は $\begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 22 \end{pmatrix}$ より，点 $(31,\ 22)$ となる．

2.
(1) f^{-1} を表す行列は f を表す行列の逆行列により与えられる．したがって $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(2) g^{-1} を表す行列は g を表す行列の逆行列により与えられる．したがって $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

(3) まず，$f \circ g$ を与える行列を求めると $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$ となる．$(f \circ g)^{-1}$ はこの行列の逆行列で表されるから，$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$

3. 点 $\mathrm{P}'(2,\ -1)$ に移されるもとの点の座標を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ となる．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

より，点 P の座標 $\left(-\frac{5}{3},\ 2\right)$ を得る．

4. 線形変換 f を表す行列が正則であることに注意する．直線 $y+3x=6$ 上の点を $(x,\ y)$，もとの図形上の点を $(x',\ y')$ とすると $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる．点 $(x,\ y)$ は $y+3x=6$ つまり $y=-3x+6$ を満たすから $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -3x+6 \end{pmatrix}$ となる．両辺に左から逆行列を掛けて，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ -3x+6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -3x+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x+2 \end{pmatrix}$$

よって，

$$\begin{cases} x' = x \cdots ① \\ y' = -x+2 \cdots ② \end{cases}$$

を得る．①から $x=x'$ だから，x を消去するために②へ代入すると，$x'+y'=2$ を得る．よって，もとの図形は直線 $x+y=2$ となることがわかる．