第4章 1 「線形変換の定義」「線形変換の基本性質」 第3回

解答

1. (1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $(4,\ 1)$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $(3,\ 7)$

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

3. (1) $\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -1 \\ 19 \end{pmatrix}$

4. (1) 直線 $x - 8y = 9$

解説

1. 線形変換を表す行列は，行列の積に変形することにより求められる．

(1) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，また，$x = 3,\ y = -1$ を代入して $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ より，点 $(3,\ -1)$ の像は点 $(4,\ 1)$ となることがわかる．

(2) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，また，$x = 3,\ y = -1$ を代入して $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ より，点 $(3,\ -1)$ の像は点 $(3,\ 7)$ となることがわかる．

2. 問題の条件より，$A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$，　$A\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ となっている．教科書 125 ページ (4) を用いて，これらをまとめて書くと $A\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ となる．ここで，$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ とおくと，$AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ ……①
$|B| = -2 - 0 = -2 \neq 0$ より，B は正則だから，①の両辺の右から B^{-1} を掛けて

$$(AB)B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}B^{-1}$$

左辺 $= (AB)B^{-1} = A(BB^{-1}) = A$ および $B^{-1} = \dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ となることに注意して，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

3.
(1) $f(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}) = f(\boldsymbol{p}) + f(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$

(2) $f(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) = f(\boldsymbol{p}) - f(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

(3) $f(3\boldsymbol{p} + 2\boldsymbol{q}) = f(3\boldsymbol{p}) + f(2\boldsymbol{q}) = 3f(\boldsymbol{p}) + 2f(\boldsymbol{q}) = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 19 \end{pmatrix}$

4. 直線上の点を $(x,\ y)$, 線形変換 f によって移った先の点の座標を $(x',\ y')$ とする．$(x',\ y')$ がどのような図形になるか調べればよい． $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ より，

$$x' = 2x + 3y \cdots ① \quad \text{および} \quad y' = x \cdots ②$$

を得る．①へ $y = 2x + 3$ を代入して $x' = 2x + 3(2x + 3) = 8x + 9$ より，

$$x' = 8x + 9 \cdots ③$$

となる．②から，$x = y'$ だから，これを③へ代入して $x' = 8y' + 9$ となる．したがって，直線 $x - 8y = 9$ を得る．