第1章 5 「直線の方程式」「平面の方程式」「球の方程式」 第1回

解答

1. t は実数

(1) $x=2-3t,\ y=5+t,\ z=1+4t \quad \left(\dfrac{x-2}{-3}=y-5=\dfrac{z-1}{4}\right)$

(2) $x=1+2t,\ y=2-4t,\ z=-2+7t \quad \left(\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z+2}{7}\right)$

これ以外の次のいずれも正解である.

$x=3+2t,\ y=-2-4t,\ z=5+7t \quad \left(\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-5}{7}\right)$

$x=1-2t,\ y=2+4t,\ z=-2-7t \quad \left(\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z+2}{-7}\right)$

$x=3-2t,\ y=-2+4t,\ z=5-7t \quad \left(\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-5}{-7}\right)$

2. (1) $2x+3y-z=16$　　(2) $4x-y+3z=-5$

3. (1) $x^2+y^2+z^2=9$

(2) $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=4$

(3) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=21$

4. (1) 中心 $(2,\ -3,\ 1)$　半径 $2\sqrt{6}$　　(2) 中心 $(1,\ 0,\ -4)$　半径 5

解説

1. 点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{v}=(v_1,\ v_2,\ v_3)$ である直線の方程式は

$x=x_0+v_1t,\ y=y_0+v_2t,\ z=z_0+v_3t \quad$ (t は実数)

(2) 直線が通る点として $(1,\ 2,\ -2)$，方向ベクトルとして $\big(3-1,\ -2-2,\ 5-(-2)\big)=(2,\ -4,\ 7)$ を選ぶと，直線の方程式は　$x=1+2t,\ y=2-4t,\ z=-2+7t$　(t は実数)

これより $t=\dfrac{x-1}{2},\ t=\dfrac{y-2}{-4},\ t=\dfrac{z+2}{7}$ だから，t を消去して　$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z+2}{7}$

直線が通る点として $(3,\ -2,\ 5)$，方向ベクトルとして $\big(1-3,\ 2-(-2),\ -2-5\big)=(-2,\ 4,\ -7)$ も選べるから，解答に載せた他の3つのいずれでもよい.

2. 点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通り，零ベクトルでないベクトル $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ に垂直な平面の方程式は

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

(1) $2(x-4)+3(y-3)+(-1)(z-1)=0$ より　$2x+3y-z=16$

(2) 求める平面は $\vec{n}=(4,\ -1,\ 3)$ に垂直だから　$4(x-1)+(-1)(y-0)+3(z+3)=0$

よって　$4x-y+3z=-5$

3. 点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を中心とする半径 r の球の方程式は $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$ である.

(3) 中心の座標は　$\left(\dfrac{-3+5}{2},\ \dfrac{1+3}{2},\ \dfrac{2+6}{2}\right)=(1,\ 2,\ 4)$

半径は　$\sqrt{\{1-(-3)\}^2+(2-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{21}$

よって，求める球の方程式は　$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=21$

4. 方程式を $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$ の形に変形する.

(1) 方程式を変形すると

$$x^2-4x+4+y^2+6y+9+z^2-2z+1-10=4+9+1 \qquad \therefore\ (x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=24$$

よって，中心は $(2,\ -3,\ 1)$，半径は $2\sqrt{6}$ である.

(2) 方程式を変形すると

$$x^2-2x+1+y^2+z^2+8z+16-8=1+16 \qquad \therefore\ (x-1)^2+y^2+(z+4)^2=25$$

よって，中心は $(1,\ 0,\ -4)$，半径は 5 である.