第１章 ４ 「空間座標」「ベクトルの成分」「ベクトルの内積」 第３回

解答

1. Q$(3,\ -2,\ 0)$, R$(0,\ -2,\ -6)$, S$(3,\ 0,\ -6)$

2. (1) $\sqrt{30}$ (2) $\sqrt{22}$

3. (1) $(2,\ 5,\ -3)$ 大きさ $\sqrt{38}$ (2) $(-3,\ -5,\ 7)$ 大きさ $\sqrt{83}$

4. (1) $(0,\ 5,\ -3)$ (2) $\left(-\dfrac{7}{9},\ \dfrac{31}{9},\ -\dfrac{2}{3}\right)$

5. (1) 4 (2) -6

6. (1) $120^\circ\left(=\dfrac{2}{3}\pi\right)$ (2) $150^\circ\left(=\dfrac{5}{6}\pi\right)$

解説

1. xy 平面は $z=0$ だから，Q の座標は $(3,\ -2,\ 0)$ である．他も同様である．

2. 2 点 P$(x_1,\ y_1,\ z_1)$, Q$(x_2,\ y_2,\ z_2)$ の間の距離は $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ である．

(1) $\sqrt{(1-3)^2+(1-0)^2+\{3-(-2)\}^2}=\sqrt{4+1+25}=\sqrt{30}$

(2) $\sqrt{(2-4)^2+(-2-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{4+9+9}=\sqrt{22}$

3. $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の大きさは $|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$ である．

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(1,\ 3,\ -1)+(1,\ 2,\ -2)=(2,\ 5,\ -3)$

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{2^2+5^2+(-3)^2}=\sqrt{38}$

(2) $\vec{a}-4\vec{b}=(1,\ 3,\ -1)-4(1,\ 2,\ -2)=(1,\ 3,\ -1)-(4,\ 8,\ -8)=(-3,\ -5,\ 7)$

$|\vec{a}-4\vec{b}|=\sqrt{(-3)^2+(-5)^2+7^2}=\sqrt{83}$

4. 2 点 A, B に対し，線分 AB を $m:n$ の比に内分する点 P の位置ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}$ である．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3+1}=\dfrac{(-3,\ -1,\ 6)+3(1,\ 7,\ -6)}{4}=\dfrac{(0,\ 20,\ -12)}{4}=(0,\ 5,\ -3)$

よって，点 P の座標は $(0,\ 5,\ -3)$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5+4}=\dfrac{4(-3,\ -1,\ 6)+5(1,\ 7,\ -6)}{9}=\dfrac{(-7,\ 31,\ -6)}{9}=\left(-\dfrac{7}{9},\ \dfrac{31}{9},\ -\dfrac{2}{3}\right)$

よって，点 P の座標は $\left(-\dfrac{7}{9},\ \dfrac{31}{9},\ -\dfrac{2}{3}\right)$

5. $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ である．

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-3)+3\times4+(-1)\times2=-6+12-2=4$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1\times3+1\times5+4\times(-2)=-3+5-8=-6$

6. $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, $0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求める．

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$, $|\vec{a}|=\sqrt{6}$, $|\vec{b}|=\sqrt{6}$ より $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\dfrac{-3}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=-\dfrac{1}{2}$

よって $\theta=120^\circ\left(=\dfrac{2}{3}\pi\right)$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-21$, $|\vec{a}|=\sqrt{42}$, $|\vec{b}|=\sqrt{14}$ より $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\dfrac{-21}{\sqrt{42}\times\sqrt{14}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって $\theta=150^\circ\left(=\dfrac{5}{6}\pi\right)$