第１章 4 「空間座標」「ベクトルの成分」「ベクトルの内積」 第１回

解答

1. Q$(1,\ 2,\ 0)$, R$(0,\ 2,\ 3)$, S$(1,\ 0,\ 3)$

2. (1) $\sqrt{14}$ (2) $3\sqrt{5}$

3. (1) $(5,\ 3,\ -3)$ 大きさ $\sqrt{43}$ (2) $(-5,\ 1,\ 4)$ 大きさ $\sqrt{42}$

4. (1) $(2,\ 0,\ 3)$ (2) $\left(-\frac{2}{7},\ \frac{24}{7},\ \frac{5}{7}\right)$

5. (1) 16 (2) 8

6. (1) $45^\circ\left(=\frac{\pi}{4}\right)$ (2) $120^\circ\left(=\frac{2}{3}\pi\right)$

解説

1. xy 平面は $z=0$ だから，Q の座標は $(1,\ 2,\ 0)$ である．他も同様である．

2. 2 点 P$(x_1,\ y_1,\ z_1)$, Q$(x_2,\ y_2,\ z_2)$ の間の距離は $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ である．

(1) $\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$

(2) $\sqrt{(-4-1)^2+\{-1-(-3)\}^2+(6-2)^2}=\sqrt{25+4+16}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

3. $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の大きさは $|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$ である．

(1) $\vec{a}-\vec{b}=(2,\ 2,\ -1)-(-3,\ -1,\ 2)=(5,\ 3,\ -3)$

$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5^2+3^2+(-3)^2}=\sqrt{43}$

(2) $2\vec{a}+3\vec{b}=2(2,\ 2,\ -1)+3(-3,\ -1,\ 2)=(4,\ 4,\ -2)+(-9,\ -3,\ 6)=(-5,\ 1,\ 4)$

$|2\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{(-5)^2+1^2+4^2}=\sqrt{42}$

4. 2 点 A, B に対し，線分 AB を $m:n$ の比に内分する点 P の位置ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}$ である．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{1+2}=\dfrac{2(4,\ -3,\ 5)+(-2,\ 6,\ -1)}{3}=\dfrac{(6,\ 0,\ 9)}{3}=(2,\ 0,\ 3)$

よって，点 P の座標は $(2,\ 0,\ 3)$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5+2}=\dfrac{2(4,\ -3,\ 5)+5(-2,\ 6,\ -1)}{7}=\dfrac{(-2,\ 24,\ 5)}{7}=\left(-\dfrac{2}{7},\ \dfrac{24}{7},\ \dfrac{5}{7}\right)$

よって，点 P の座標は $\left(-\dfrac{2}{7},\ \dfrac{24}{7},\ \dfrac{5}{7}\right)$

5. $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ である．

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times1+1\times5+4\times2=3+5+8=16$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-5\times2+3\times4+(-2)\times(-3)=-10+12+6=8$

6. $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, $0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求める．

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$ より $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\dfrac{3}{3\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって $\theta=45^\circ\left(=\dfrac{\pi}{4}\right)$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\sqrt{6}$, $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=2\sqrt{2}$ より $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\dfrac{-\sqrt{6}}{\sqrt{3}\times2\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$

よって $\theta=120^\circ\left(=\dfrac{2}{3}\pi\right)$