第１章 3 「ベクトルの図形への応用」「直線のベクトル方程式」 第１回

解答

1. (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4}$, $\mathrm{P}\,(-4,\ 2)$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 5\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{8}$, $\mathrm{P}\left(-3,\ \dfrac{3}{2}\right)$

2. $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (6,\ -6)$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (4,\ -4)$
$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より，A, B, C は一直線上にある．

3. t は実数

(1) $x = 1 + 5t$, $y = 3 + 2t$
(2) $y = 4 \quad (x = -2 + 3t)$
(3) $x = 5 + 3t$, $y = 4 - 2t$
これ以外に次のいずれも正解である．
$x = 8 + 3t$, $y = 2 - 2t$　　$x = 5 - 3t$, $y = 4 + 2t$　　$x = 8 - 3t$, $y = 2 + 2t$

4. (1) $(6,\ 5)$　　(2) $(2,\ -3)$

5. (1) $\dfrac{3}{\sqrt{29}}$　　(2) $\dfrac{5}{\sqrt{13}}$

解説

1. 2 点 A, B に対し，線分 AB を $m:n$ の比に内分する点 P の位置ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}$ である．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3+1} = \dfrac{(2,\ -1) + 3(-6,\ 3)}{4} = \dfrac{(-16,\ 8)}{4} = (-4,\ 2)$ より，点 P の座標は　$(-4,\ 2)$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 5\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5+3} = \dfrac{3(2,\ -1) + 5(-6,\ 3)}{8} = \dfrac{(-24,\ 12)}{8} = \left(-3,\ \dfrac{3}{2}\right)$ より，点 P の座標は　$\left(-3,\ \dfrac{3}{2}\right)$

2. 3 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のうち 2 つが平行であれば，点 A, B, C は一直線上にある．

3. 点 $(x_0,\ y_0)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{v} = (v_1,\ v_2)$ である直線の媒介変数による方程式は
$x = x_0 + v_1 t$, $y = y_0 + v_2 t$　(t は実数)

(3) 直線が通る点として $(5,\ 4)$，方向ベクトルとして $(8-5,\ 2-4) = (3,\ -2)$ を選ぶと，媒介変数による方程式は　$x = 5 + 3t$, $y = 4 - 2t$　(t は実数)
直線が通る点として $(8,\ 2)$，方向ベクトルとして $(5-8,\ 4-2) = (-3,\ 2)$ も選べるから，解答に載せた他の 3 つのいずれでもよい．

4. 直線 $ax + by + c = 0$ の法線ベクトルの 1 つは $\vec{n} = (a,\ b)$ である．

5. 点 $(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax + by + c = 0$ の距離は $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ である．

(1) 点と直線の距離の公式より
$$\frac{|2 \times 0 + 5 \times 0 - 3|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{29}} = \frac{3}{\sqrt{29}}$$
(2) 点と直線の距離の公式より
$$\frac{|3 \times 1 + 2 \times (-2) + 6|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$$