第1章 2 「ベクトルの内積」「ベクトルの平行と垂直」 第3回

解答

1. (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) $-\dfrac{1}{2}$ (3) 1

2. (1) $-15\sqrt{3}$ (2) -6

3. (1) -11 (2) 5

4. (1) $60^\circ\left(=\dfrac{\pi}{3}\right)$ (2) $180^\circ(=\pi)$

5. (1) $k=6$ (2) $k=\dfrac{7}{5}$

6. (1) $k=\dfrac{9}{5}$ (2) $k=2,\ 3$

解説

1. 三角比の定義に従って求める．

2. 零ベクトルでない 2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が θ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ である．

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=5\times6\times\cos150^\circ=5\times6\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-15\sqrt{3}$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times3\times\cos180^\circ=2\times3\times(-1)=-6$

3. $\vec{a}=(a_1,\ a_2),\ \vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ である．

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3\times5+(-1)\times(-4)=-11$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times4+(-3)\times1=5$

4. $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|},\ 0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求める．

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\sqrt{3},\ |\vec{a}|=2\sqrt{3},\ |\vec{b}|=2$ だから

$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times2}=\dfrac{1}{2}\quad\therefore\quad\theta=60^\circ\left(=\dfrac{\pi}{3}\right)$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-15,\ |\vec{a}|=\sqrt{5},\ |\vec{b}|=3\sqrt{5}$ だから

$\cos\theta=\dfrac{-15}{\sqrt{5}\times3\sqrt{5}}=-1\quad\therefore\quad\theta=180^\circ(=\pi)$

5. (1) ベクトルの平行条件より，$\vec{b}=m\vec{a}$ となる実数 m が存在する．$(k+2,\ 2k)=m(2,\ 3)$ より

$k+2=2m,\ 2k=3m$

この連立方程式を解いて　$k=6$

(2) ベクトルの平行条件より，$\vec{b}=m\vec{a}$ となる実数 m が存在する．$(2,\ 3k)=m(4,\ k+7)$ より

$2=4m,\ 3k=m(k+7)$

この連立方程式を解いて　$k=\dfrac{7}{5}$

6. (1) ベクトルの垂直条件より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$(4k,\ -3)\cdot(2,\ k+3)=8k-3k-9=5k-9=0$

よって　$k=\dfrac{9}{5}$

(2) ベクトルの垂直条件より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$(2,\ k)\cdot(3,\ k-5)=6+k(k-5)=k^2-5k+6=0$

この 2 次方程式を解いて　$k=2,\ 3$