第1章 2 「ベクトルの内積」「ベクトルの平行と垂直」 第2回

解答

1. (1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(2) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(3) -1

2. (1) $\dfrac{15\sqrt{2}}{2}$　(2) -6

3. (1) -7　(2) -1

4. (1) $30^\circ\left(=\dfrac{\pi}{6}\right)$　(2) $135^\circ\left(=\dfrac{3}{4}\pi\right)$

5. (1) $k=-2$　(2) $k=1$

6. (1) $k=-\dfrac{3}{11}$　(2) $k=3,\ -5$

解説

1. 三角比の定義に従って求める.

2. 零ベクトルでない 2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が θ のとき, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ である.

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times5\times\cos45^\circ=3\times5\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{15\sqrt{2}}{2}$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times3\times\cos120^\circ=4\times3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-6$

3. $\vec{a}=(a_1,\ a_2),\ \vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ である.

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=5\times1+(-2)\times6=-7$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\times4+1\times7=-1$

4. $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|},\ 0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求める.

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=6,\ |\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=2\sqrt{3}$ だから

$$\cos\theta=\frac{6}{2\times2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\therefore\quad\theta=30^\circ\left(=\frac{\pi}{6}\right)$$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-10,\ |\vec{a}|=\sqrt{10},\ |\vec{b}|=2\sqrt{5}$ だから

$$\cos\theta=\frac{-10}{\sqrt{10}\times2\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\therefore\quad\theta=135^\circ\left(=\frac{3}{4}\pi\right)$$

5. (1) ベクトルの平行条件より, $\vec{b}=m\vec{a}$ となる実数 m が存在する. $(k-1,\ 3k)=m(1,\ 2)$ より

$$k-1=m,\ 3k=2m$$

この連立方程式を解いて　$k=-2$

(2) ベクトルの平行条件より, $\vec{b}=m\vec{a}$ となる実数 m が存在する. $(1,\ k)=m(3,\ k+2)$ より

$$1=3m,\ k=m(k+2)$$

この連立方程式を解いて　$k=1$

6. (1) ベクトルの垂直条件より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$$(2k,\ 3)\cdot(4,\ k+1)=8k+3k+3=11k+3=0$$

よって　$k=-\dfrac{3}{11}$

(2) ベクトルの垂直条件より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$$(k,\ 3)\cdot(k+2,\ -5)=k(k+2)-15=k^2+2k-15=0$$

この 2 次方程式を解いて　$k=3,\ -5$