

解答

1. (1) 最大値 -6 ($x = 0$) (2) 最小値 4 ($x = 3$)
 (3) 最小値 -1 ($x = 2$) (4) 最大値 6 ($x = 3$)
2. (1) 最大値 107 ($x = 2$), 最小値 11 ($x = -2$) (2) 最大値 5 ($x = 0$), 最小値 -19 ($x = \pm 2$)
 (3) 最大値 13 ($x = -2$), 最小値 -19 ($x = 2$) (4) 最大値 32 ($x = -2$), 最小値 $-\frac{19}{4}$ ($x = \frac{3}{2}$)
3. (1) $y = 2\pi x^2 - 40\pi x + 400\pi$, $0 < x < 20$ (2) 最小値 $200\pi(\text{cm}^2)$ ($x = 10(\text{cm})$)
4. (1) 0個 (2) 2個, $(1, 0)$, $(5, 0)$ (3) 1個, $(-4, 0)$
5. (1) $k < \frac{1}{8}$ (2) $k = \frac{1}{8}$ (3) $k > \frac{1}{8}$

解説

1. $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは $a > 0$ のとき下に凸より頂点で最小値, $a < 0$ のとき上に凸より頂点で最大値
- (1) $a = -3 < 0$ より上に凸, 最大値 -6 ($x = 0$) (2) $a = 6 > 0$ より下に凸, 最小値 4 ($x = 3$)
- (3) $y = 2(x^2 - 4x) + 7 = 2\{(x - 2)^2 - 4\} + 7 = 2(x - 2)^2 - 8 + 7 = 2(x - 2)^2 - 1$
 $a = 2 > 0$ より下に凸, 最小値 -1 ($x = 2$)
- (4) $y = -(x^2 - 6x) - 3 = -\{(x - 3)^2 - 9\} - 3 = -(x - 3)^2 + 9 - 3 = -(x - 3)^2 + 6$
 $a = -1 < 0$ より上に凸, 最大値 6 ($x = 3$)
2. (1) 頂点 $(-3, 7)$ は範囲外で, $x = -2$ のとき $y = 11$, $x = 2$ のとき $y = 107$
 よって, 最大値 107 ($x = 2$), 最小値 11 ($x = -2$)
- (2) グラフは上に凸, 頂点 $(0, 5)$ で最大で, $x = \pm 2$ のとき $y = -19$
 よって, 最大値 5 ($x = 0$), 最小値 -19 ($x = \pm 2$)
- (3) $y = -(x^2 + 8x) + 1 = -\{(x + 4)^2 - 16\} + 1 = -(x + 4)^2 + 16 + 1 = -(x + 4)^2 + 17$, 頂点 $(-4, 17)$ は
 範囲外で, $x = -2$ のとき $y = 13$, $x = 2$ のとき $y = -19$ よって 最大値 13 ($x = -2$), 最小値 -19 ($x = 2$)
- (4) $y = 3(x^2 - 3x) + 2 = 3\left\{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right\} + 2 = 3\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{27}{4} + 2 = 3\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{19}{4}$
 グラフは下に凸, 頂点 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{19}{4}\right)$ で最小で, $x = -2$ のとき $y = 32$, $x = 2$ のとき $y = -4$
 よって, 最大値 32 ($x = -2$), 最小値 $-\frac{19}{4}$ ($x = \frac{3}{2}$)
3. (1) $y = \pi x^2 + \pi(20 - x)^2 = \pi x^2 + \pi(400 - 40x + x^2) = 2\pi x^2 - 40\pi x + 400\pi$
 半径 $x > 0$, $20 - x > 0$ より $0 < x < 20$
- (2) $y = 2\pi(x^2 - 20x) + 400\pi = 2\pi\{(x - 10)^2 - 100\} + 400\pi = 2\pi(x - 10)^2 - 200\pi + 400\pi = 2\pi(x - 10)^2 + 200\pi$
 グラフは下に凸, 頂点 $(10, 200\pi)$ で最小 よって, 最小値 $200\pi(\text{cm}^2)$ ($x = 10(\text{cm})$)
4. (1) 判別式 $D = 3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-2) = -7 < 0$ よって共有点 0 個
- (2) 判別式 $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 > 0$ よって共有点 2 個, $x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5) = 0$ より $x = 1, 5$
 したがって共有点の座標は $(1, 0)$, $(5, 0)$
- (3) 判別式 $D = (-8)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-16) = 0$ よって共有点 1 個, $-x^2 - 8x - 16 = -(x + 4)^2 = 0$ より $x = -4$
 したがって共有点の座標は $(-4, 0)$
5. (1) $D = 1 - 8k > 0$ よって $k < \frac{1}{8}$ (2) $D = 1 - 8k = 0$ よって $k = \frac{1}{8}$ (3) $D = 1 - 8k < 0$ よって $k > \frac{1}{8}$