日　付	学　科	学　年	番　　号	名　　前
／				

第3章 7 「極座標による2重積分（発展その1）」 第1回

例題 D を ( ) 内の不等式で表される xy 平面上の領域とするとき，次の 2 重積分の値を極座標変換によって求めよ．

$$\iint_D x^2y\,dxdy \qquad (x^2+y^2 \leqq 4,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$$

解 $$\iint_D x^2y\,dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 (r\cos\theta)^2\, r\sin\theta\, r\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^2 r^4dr\right\}\cos^2\theta\,\sin\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^2\cos^2\theta\,\sin\theta\,d\theta = \frac{32}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\sin\theta\,d\theta = \frac{32}{5}\cdot\frac{1}{3} = \frac{32}{15}$$

なお $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\sin\theta\,d\theta$ については，

$\cos\theta = t$ とおくと $\sin\theta d\theta = -dt$，また，$\theta = 0$ のとき $t = 1$，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $t = 0$ となることから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\sin\theta\,d\theta = \int_1^0 t^2(-dt) = \int_0^1 t^2dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

または，$\dfrac{d}{d\theta}\left[-\dfrac{1}{3}\cos^3\theta\right] = -\dfrac{1}{3}\cdot 3\cos^2\theta\dfrac{d}{d\theta}\cos\theta = \cos^2\theta\,\sin\theta$ となることから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\sin\theta\,d\theta = \left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left\{-\frac{1}{3}\cos^3\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{1}{3}\cos^3 0\right)\right\} = \left\{-\frac{1}{3}\cdot 0^3 - \left(-\frac{1}{3}\cdot 1^3\right)\right\} = \frac{1}{3}$$

と計算しても求めることができる．

1. D を ( ) 内の不等式で表される xy 平面上の領域とするとき，次の 2 重積分の値を極座標変換によって求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x^3y\,dxdy \qquad (x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

(2) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy \qquad (x^2+y^2 \leqq 4,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

(3) $\displaystyle\iint_D xy^2\,dxdy \qquad (x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$