第 4 章 5 「定数係数非斉次線形微分方程式」 第 3 回

解答

$C_1,\ C_2$ は任意定数とする

1. (1) $x = 2t^2 + 6t + 6 + C_1e^t + C_2e^{2t}$

(2) $x = t^2 + t + e^t(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t)$

2. (1) $x = -4e^{-t} + C_1e^{-2t} + C_2$

(2) $\dfrac{1}{8}e^{3t} + (C_1 + C_2t)e^{-t}$

3. (1) $x = \dfrac{3}{2}\cos 2t - \dfrac{1}{2}\sin 2t + C_1e^{-2t} + C_2e^t$

(2) $x = \dfrac{1}{5}\cos 2t - \dfrac{1}{10}\sin 2t + e^t(C_1\cos t + C_2\sin t)$

解説

$C_1,\ C_2$ は任意定数とする

1. (1) 右辺 $= 0$ とおいた斉次微分方程式の一般解は

$$x = C_1e^t + C_2e^{2t}$$

次に, 与えられた微分方程式の右辺は 2 次式だから, 1 つの解を $x = At^2 + Bt + C$ ($A,\ B,\ C$ は定数) と予想して代入すると

$(At^2 + Bt + C)'' - 3(At^2 + Bt + C)'$
$+ 2(At^2 + Bt + C) = 4t^2 - 2$

$2At^2 + (-6A + 2B)t + (2A - 3B + 2C) = 4t^2 - 2$

係数を比較して

$2A = 4,\ -6A + 2B = 0,\ 2A - 3B + 2C = -2$

より $A = 2,\ B = 6,\ C = 6$

1 つの解は $x = 2t^2 + 6t + 6$

よって, 求める一般解は

$$x = 2t^2 + 6t + 6 + C_1e^t + C_2e^{2t}$$

(2) 右辺 $= 0$ とおいた斉次微分方程式の一般解は

$$x = e^t(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t)$$

次に, 与えられた微分方程式の右辺は 2 次式だから, 1 つの解を $x = At^2 + Bt + C$($A,\ B,\ C$ は定数) と予想して代入すると

$(At^2 + Bt + C)'' - 2(At^2 + Bt + C)' + 5(At^2 + Bt + C) = 5t^2 + t$

$5At^2 + (-4A + 5B)t + (2A - 2B + 5C) = 5t^2 + t$

係数を比較して $5A = 5,\ -4A + 5B = 1,$

$2A - 2B + 5C = 0$ より $A = 1,\ B = 1,\ C = 0$

1 つの解は $x = t^2 + t$

よって, 求める一般解は

$$x = t^2 + t + e^t(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t)$$

2. (1) 右辺 $= 0$ とおいた斉次微分方程式の一般解は

$$x = C_1e^{-2t} + C_2$$

次に, 与えられた微分方程式の右辺は e^{-t} だから, 1 つの解を $x = Ae^{-t}$ (A は定数) と予想して代入すると

$(Ae^{-t})'' + 2(Ae^{-t})' = 4e^{-t}$ より $-Ae^{-t} = 4e^{-t}$

係数を比較して $-A = 4$ より $A = -4$

1 つの解は $x = -4e^{-t}$

よって, 求める一般解は

$$x = -4e^{-t} + C_1e^{-2t} + C_2$$

(2) 右辺 $= 0$ とおいた斉次微分方程式の一般解は

$$x = (C_1 + C_2t)e^{-t}$$

次に, 与えられた微分方程式の右辺は e^{3t} だから, 1 つの解を $x = Ae^{3t}$(A は定数) と予想して代入すると

$(Ae^{3t})'' + 2(Ae^{3t})' + Ae^{2t} = 2e^{3t}$ より

$16Ae^{3t} = 2e^{3t}$

係数を比較して $16A = 2$ より $A = \dfrac{1}{8}$

1 つの解は $x = \dfrac{1}{8}e^{3t}$

よって, 求める一般解は

$$x = \frac{1}{8}e^{3t} + (C_1 + C_2t)e^{-t}$$

3. (1) 右辺 $= 0$ とおいた斉次微分方程式の一般解は

$$x = C_1e^{-2t} + C_2e^t$$

次に, 与えられた微分方程式の右辺は $\cos 2t$ だから, 1 つの解を

$x = A\cos 2t + B\sin 2t$ ($A,\ B$ は定数) と予想して代入すると

$(A\cos 2t + B\sin 2t)'' + (A\cos 2t + B\sin 2t)'$
$- 2(A\cos 2t + B\sin 2t) = -10\cos 2t$ より

$(-6A + 2B)\cos 2t + (-2A - 6B)\sin 2t$
$= -10\cos 2t$

係数を比較して

$-6A + 2B = -10,\ -2A - 6B = 0$ より

$$A = \frac{3}{2},\ B = -\frac{1}{2}$$

1 つの解は $x = \dfrac{3}{2}\cos 2t - \dfrac{1}{2}\sin 2t$

よって, 求める一般解は

$$x = \frac{3}{2}\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t + C_1e^{-2t} + C_2e^t$$

(2) 右辺 $= 0$ とおいた斉次微分方程式の一般解は

$$x = e^t(C_1\cos t + C_2\sin t)$$

次に微分方程式の右辺は $\sin 2t$ だから, 1 つの解を $x = A\cos 2t + B\sin 2t$ ($A,\ B$ は定数) と予想して代入すると

$(A\cos 2t + B\sin 2t)'' + (A\cos 2t + B\sin 2t)$
$= \sin 2t$ より

$(-2A - 4B)\cos 2t + (4A - 2B)\sin 2t = \sin 2t$

係数を比較して $-2A - 4B = 0,\ 4A - 2B = 1$

より $A = \dfrac{1}{5},\ B = -\dfrac{1}{10}$

1 つの解は $x = \dfrac{1}{5}\cos 2t - \dfrac{1}{10}\sin 2t$

よって, 求める一般解は

$$x = \frac{1}{5}\cos 2t - \frac{1}{10}\sin 2t + e^t(C_1\cos t + C_2\sin t)$$