第4章 4 「定数係数斉次線形微分方程式」 第1回

解答

$C_1,\ C_2$ は任意定数とする

1. (1) $x = C_1e^{-2t} + C_2e^{t}$

(2) $x = C_1e^{-2t} + C_2e^{-t}$

(3) $x = (C_1 + C_2t)e^{-2t}$

(4) $x = e^{t}(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t)$

2. (1) $x = (C_1 + C_2t)e^{-t}$

(2) $x = (1+t)e^{-t}$

(3) $x = te^{-t}$

3. (1) $x = \cos t + 5\sin t$ (2) $x = \sin t$

解説

$C_1,\ C_2$ は任意定数とする

1. (1) 特性方程式より $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

これを解くと $\lambda = -2,\ 1$

よって, 求める一般解は

$x = C_1e^{-2t} + C_2e^{t}$

(2) 特性方程式より $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

これを解くと $\lambda = -2,\ -1$

よって, 求める一般解は

$x = C_1e^{-2t} + C_2e^{-t}$

(3) 特性方程式より $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

これを解くと $\lambda = -2$ (2 重解)

よって, 求める一般解は

$x = (C_1 + C_2t)e^{-2t}$

(4) 特性方程式より $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$

これを解くと $\lambda = 1 \pm 2i$

よって, 求める一般解は

$x = e^{t}(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t)$

2. (1) 特性方程式より $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

これを解くと $\lambda = -1$ (2 重解)

よって, 求める一般解は

$x = (C_1 + C_2t)e^{-t}$

(2) (1) より $\dfrac{dx}{dt} = -C_1e^{-t} + C_2e^{-t} - C_2te^{-t}$

$t = 0,\ \dfrac{dx}{dt} = 0$ を代入すると $0 = -C_1 + C_2$

一般解 $x = (C_1 + C_2t)e^{-t}$ に $t = 0,\ x = 1$ を代入すると $1 = C_1$

これらを連立して $C_1 = 1,\ C_2 = 1$ を得る

よって, 求める解は $x = (1+t)e^{-t}$

(3) (2) と同様に一般解に $t = 0, x = 0$ および $t = 1,\ x = \dfrac{1}{e}$ を代入すると

$0 = C_1,\ e^{-1} = C_1 + C_2e^{-1}$

これらを連立して $C_1 = 0,\ C_2 = 1$

よって, 求める解は $x = te^{-t}$

3. (1) 特性方程式より $\lambda^2 + 1 = 0$

これを解くと $\lambda = \pm i$

よって, 求める一般解は

$x = C_1\cos t + C_2\sin t$ ($C_1,\ C_2$は任意定数)

$\dfrac{dx}{dt} = -C_1\sin t + C_2\cos t$

$t = 0,\ \dfrac{dx}{dt} = 5$ を代入すると $5 = C_2$

$x = C_1\cos t + C_2\sin t$ に $t = 0,\ x = 1$ を代入すると $1 = C_1$

よって, 求める解は $x = \cos t + 5\sin t$

(2) (1) で得られた一般解に $t = 0, x = 0$ および $t = \dfrac{\pi}{2}, x = 1$ を代入すると $0 = C_1,\ 1 = C_2$

よって, 求める解は $x = \sin t$