第 4 章 3 「同次形」 第 1 回

解答

1.

(1) 右辺 $= \dfrac{2x^2 - tx}{2tx} = \dfrac{2\left(\dfrac{x}{t}\right)^2 - \dfrac{x}{t}}{2\left(\dfrac{x}{t}\right)}$

(2) $x = t\left(-\dfrac{1}{2}\log|t| + C\right)$ （C は任意定数)

(3) $x = t\left(-\dfrac{1}{2}\log|t| + 1\right)$

解説

C は任意定数とする

1. (1) 右辺の分母と分子を t^2 で割ると

$$\frac{2x^2 - tx}{2tx} = \frac{\dfrac{2x^2 - tx}{t^2}}{\dfrac{2tx}{t^2}} = \frac{2\left(\dfrac{x}{t}\right)^2 - \dfrac{x}{t}}{2\left(\dfrac{x}{t}\right)}$$

(2) $u = \dfrac{x}{t}$ とおくと, u は t の関数で

$x = tu$ だから，両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = u + \frac{du}{dt}t$$

微分方程式に代入すると

$$u + \frac{du}{dt}t = \frac{2u^2 - u}{2u} = u - \frac{1}{2} \text{ より}$$

$$\frac{du}{dt}t = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{2t}$$

$$\int du = \int \left(-\frac{1}{2t}\right) dt$$

$$u = -\frac{1}{2}\log|t| + C$$

$x = tu$ より, 求める一般解は

$$x = t\left(-\frac{1}{2}\log|t| + C\right)$$

(3) (2) の一般解に $t = 1$，$x = 1$ を代入すると

$1 = 1 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\log|1| + C\right)$ より $1 = C$

よって, 求める解は $x = t\left(-\dfrac{1}{2}\log|t| + 1\right)$