第4章 2 「1階線形微分方程式」 第3回

解答

C は任意定数とする

1. (1) $x = 2t^2 \log|t| + Ct^2$ (2) $x = \dfrac{1}{2}e^t + Ce^{-t}$

(3) $x = -1 + Ce^{-t^2}$

(4) $x = 2t^2 + 2 + C(t^2+1)^2$

2. $x = 3t^2 + 3$

解説

$c,\ C$ は任意定数とする

1. (1) $\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{2x}{t} = 0$ の一般解を求める．

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2x}{t}$ より $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{2}{t}dt$

$\log|x| = 2\log|t| + c$ より $C = \pm e^c$ とおくと

一般解は $x = Ct^2$

定数 C を t の関数 $u = C(t)$ で置き換えると

$x = ut^2$　両辺を t で微分して

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}\cdot t^2 + u\cdot 2t$$

微分方程式に代入して

$t^2\dfrac{du}{dt} = 2t$ より $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{2}{t}$

$$\int du = \int \frac{2}{t}dt = 2\log|t| + C$$

$u = 2\log|t| + C$ より，求める一般解は

$$x = 2t^2\log|t| + Ct^2$$

(2) $\dfrac{dx}{dt} + x = 0$ の一般解を求める．

$\dfrac{dx}{dt} = -x$ より $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \int(-1)dt$

$\log|x| = -t + c$ より　$C = \pm e^c$ とおくと

一般解は $x = Ce^{-t}$

定数 C を t の関数 $u = C(t)$ で置き換えると

$x = ue^{-t}$　両辺を t で微分して

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}\cdot e^{-t} + u\cdot(-e^{-t})$$

微分方程式に代入して

$e^{-t}\dfrac{du}{dt} = e^t$ より $\dfrac{du}{dt} = e^{2t}$

$$\int du = \int e^{2t}dt = \frac{1}{2}e^{2t} + C$$

$u = \dfrac{1}{2}e^{2t} + C$ より求める一般解は

$$x = \frac{1}{2}e^t + Ce^{-t}$$

(3) $\dfrac{dx}{dt} + 2tx = 0$ の一般解を求める．

$\dfrac{dx}{dt} = -2tx$ より $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \int(-2t)dt$

$\log|x| = -t^2 + c$ より C を $\pm e^c$ とおくと

一般解は $x = Ce^{-t^2}$

定数 C を t の関数 $u = C(t)$ で置き換えると

$x = ue^{-t^2}$　両辺を t で微分して

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}\cdot e^{-t^2} + u\cdot(-2te^{-t^2})$$

微分方程式に代入して

$$\frac{du}{dt} = -2te^{t^2}$$

$$\int du = \int(-2te^{t^2})dt = -e^{t^2} + C$$

$u = -e^{t^2} + C$ より 求める一般解は

$$x = -1 + Ce^{-t^2}$$

(4) $\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{4t}{t^2+1}x = 0$ の一般解を求める．

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{4t}{t^2+1}x$ より $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{4t}{t^2+1}dt$

$\log|x| = 2\log|t^2+1| + c$ より

C を $\pm e^c$ とおくと，一般解は $x = C(t^2+1)^2$

定数 C を t の関数 $u = C(t)$ で置き換えると

$x = u(t^2+1)^2$　両辺を t で微分して

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}(t^2+1)^2 + u\cdot 2(t^2+1)\cdot 2t$$

微分方程式に代入して

$(t^2+1)^2\dfrac{du}{dt} = -4t$ より $\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{4t}{(t^2+1)^2}$

$$\int du = \int\left\{-\frac{4t}{(t^2+1)^2}\right\}dt = \frac{2}{t^2+1} + C$$

$u = \dfrac{2}{t^2+1} + C$ より，求める一般解は

$$x = 2t^2 + 2 + C(t^2+1)^2$$

2. $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{2t}{t^2+1}x = 0$ の一般解を求める．

$\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{2t}{t^2+1}x$ より $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \int\left(-\frac{2t}{t^2+1}\right)dt$

$\log|x| = -\log|t^2+1| + c$ より

C を $\pm e^c$ とおくと

一般解は $x = \dfrac{C}{t^2+1}$

定数 C を t の関数 $u = C(t)$ で置き換えると

$x = \dfrac{u}{t^2+1}$　両辺を t で微分して

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}\frac{1}{t^2+1} + u\cdot\left\{\frac{-2t}{(t^2+1)^2}\right\}$$

微分方程式に代入して

$\dfrac{1}{t^2+1}\dfrac{du}{dt} = 12t$ より $\dfrac{du}{dt} = 12t^3 + 12t$

$$\int du = \int(12t^3+12t)dt = 3t^4 + 6t^2 + C$$

$u = 3t^4 + 6t^2 + C$ より求める一般解は

$$x = \frac{3t^4 + 6t^2 + C}{t^2+1}$$

初期条件「$t=0$ のとき $x=3$」を代入すると $3 = C$

求める解は

$$x = \frac{3t^4+6t^2+3}{t^2+1} = \frac{3(t^2+1)^2}{t^2+1} = 3t^2 + 3$$